

Arreglos de espejos no planares para la recolección de luz solar

Pablo V. Negrón-Marrero*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Humacao, PR 00791-4300

Errol Montes-Pizarro†
Departamento de Matemáticas y Física
Universidad de Puerto Rico
Cayey, PR 00777

Josean Velázquez
Escuela Superior Petra Mercado
Humacao, PR 00791

Febrero, 2013

Resumen

En este artículo consideramos un modelo simplificado de un sistema para la recolección de energía solar que consiste de un arreglo de espejos (*helióstato*) y una torre colectora. Los espejos no tienen que estar todos a la misma altura. Utilizando un paquete de optimización comercial, podemos estimar los parámetros geométricos del arreglo que maximizan la recolección total del sistema.

*pnm@mate.uprh.edu

†errol.montes@upr.edu

1 Introducción

La obtención de energía limpia y sostenible utilizando fuentes alternas al petróleo es uno de los problemas más importantes de este siglo. Las tecnologías de celdas solares, turbinas y otras han mejorado grandemente pero es necesario seguir explorando con otras alternativas. En este artículo exploramos una de estas otras alternativas basada en arreglos de espejos llamados *helióstatos*. Estos arreglos de espejos dirigen o reflejan la luz solar hacia una torre colectora. La energía capturada por la torre colectora puede ser utilizada para mover un generador de electricidad. Los helióstatos han sido utilizados con éxito en varios países como los Estados Unidos y España¹.

Típicamente, los arreglos de espejos de un helióstato se arreglan en forma semi-circular en un terreno plano alrededor de la torre colectora, con cada espejo “mirando” hacia la torre. Recientemente se ha demostrado [2] que si los espejos se organizan en un patrón similar al de las hojas en ciertas plantas [1], entonces la eficiencia del helióstato mejora grandemente. En este trabajo comenzamos a estudiar si estos tipos de arreglos ayudan también a mejorar la eficiencia de un helióstato pero cuando los espejos se colocan en un arreglo que no es plano, como por ejemplo, si se colocaran en una colina o montaña. Empezamos a estudiar este problema en el caso especial en que los rayos de luz incidente (del sol), la torre colectora, y las direcciones normales a los espejos, están todos en el mismo plano.

En la Sección 2 derivamos la expresión básica para la luz reflejada por un solo espejo. Esta expresión depende de los parámetros geométricos del espejo (inclinación, largo, distancia de la torre) y de la torre colectora (altura de la torre y el colector), y del ángulo de inclinación de los rayos de luz incidentes. Esta fórmula se utiliza ahora en la Sección 3 para obtener una expresión (cf. (3.5)) para la luz total reflejada por un arreglo de espejos, sin tomar en consideración las interferencias entre espejos. Los espejos ahora pueden estar a alturas diferentes, lo que añade estas alturas a los parámetros geométricos del arreglo de espejos. En la Sección 3.1 calculamos las expresiones para las interferencias entre espejos, las cuales son de dos tipos: por reflexión o por bloqueo. Con estas expresiones podemos entonces corregir la fórmula (3.5). La expresión resultante se suma (usando una integral) sobre todos los posibles ángulos de los rayos incidente, resultando en una función de recolección total (cf. (3.9)) que depende de todos los parámetros geométricos del ar-

¹<http://www.abengosolar.com>

reglo de espejos y torre. El problema ahora es determinar para que valores de los parámetros geométricos, la función de recolección total es máxima. Dado que los parámetros geométricos satisfacen varias restricciones, dadas por ejemplo por las dimensiones del terreno donde se colocan los espejos, el problema de maximizar que hay que resolver es uno de tipo no lineal y con restricciones. Finalmente en la Sección 4 presentamos los resultados numéricos de una simulación utilizando el programado MATLAB para un arreglo de seis espejos.

2 Caso de un espejo al nivel de la tierra

En la Figura 1 se muestra un diagrama de un espejo o reflector, un rayo incidente y el correspondiente rayo reflejado. Vamos a asumir en esta discusión que el rayo incidente, la torre colectora, y la dirección normal al espejo (Figura 2), están todos en el mismo plano. Si $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es el ángulo que hace el rayo incidente con la dirección normal a la tierra (o el piso), y $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ es el ángulo que hace el espejo con la horizontal, entonces el ángulo que hace el rayo reflejado con la horizontal es $\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha$. (Vea la Figura 1.)

Usando ésto y en referencia a la Figura 2, se puede verificar que la altura a la que el rayo reflejado interseca la línea vertical definida por la torre colectora, está dada por:

$$h = [D + (L - u) \cos \alpha] \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha \right) + (L - u) \sin \alpha, \quad 0 \leq u \leq L. \quad (2.1)$$

En esta ecuación:

D = la distancia del extremo inferior del espejo a la torre colectora.

L = el largo de la sección transversal del espejo.

u = el punto desde la parte superior del espejo donde el rayo incidente choca con el espejo.

La condición para que el rayo reflejado choque con el colector en la torre es que (vea la Figura 2) :

$$H \leq h \leq H + R,$$

donde

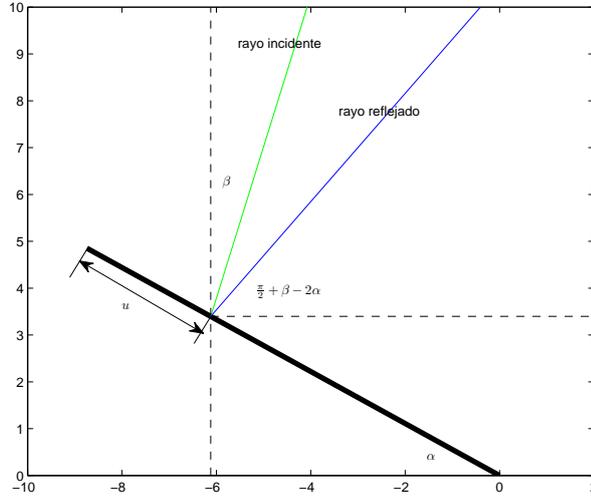


Figura 1: Rayo incidente (verde) haciendo un ángulo β con la vertical, y el correspondiente rayo reflejado (azul) que hace un ángulo $\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha$ con la horizontal.

H = la altura de la torre (sin el colector).

R = es la altura del colector de luz en el tope de la torre.

Esta desigualdad es equivalente a:

$$B - H - R \leq Au \leq B - H, \quad (2.2)$$

donde

$$A = (\cos \alpha) \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha \right) + \sin \alpha,$$

$$B = D \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha \right) + LA.$$

Note que como $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces $A > 0$ si y solo si

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha \right) > -\tan \alpha.$$

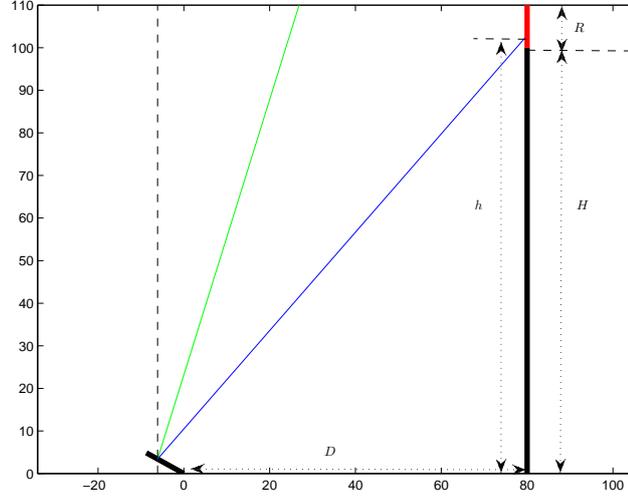


Figura 2: Diagrama ilustrando un rayo reflejado (azul) que choca o incide con el colector de la torre (rojo).

Es razonable suponer que $\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por lo que esta desigualdad es equivalente a²:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Esta condición lo que indica es que el rayo incidente choca o cae en el lado reflector del espejo. De lo contrario, el rayo incidente es paralelo o choca con la parte de atrás del espejo. La solución de la desigualdad (2.2) está dada ahora por:

$$u_m \leq u \leq u_M,$$

donde

$$u_m = \frac{B - H - R}{A}, \quad u_M = \frac{B - H}{A}, \quad \text{si } \alpha < \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$u_m = 0, \quad u_M = 0, \quad \text{si } \alpha \geq \frac{\pi}{2} + \beta$$

Tomando en consideración que $0 \leq u \leq L$, llegamos a que

$$U_m \leq u \leq U_M,$$

²En el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la función \tan tiene su inversa \tan^{-1} la cual es una función impar.

donde

$$U_m = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_m < 0, \\ \min\{L, u_m\} & , \text{ de lo contrario,} \end{cases}$$

$$U_M = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_M \leq 0, \\ \min\{L, u_M\} & , \text{ de lo contrario.} \end{cases}$$

La luz absorbida por el receptor por concepto de un espejo entonces es proporcional a $U_M - U_m$.

3 Caso de n espejos a diferentes alturas y distancias de la torre

Consideremos ahora el caso en que tenemos n espejos como en la sección anterior, pero con el i -ésimo espejo a una altura r_i sobre la tierra, a una distancia D_i de la torre colectora, sección transversal L_i , y haciendo un ángulo α_i con la superficie de la tierra. La altura a la que el rayo incidente en el i -ésimo espejo interseca la línea vertical definida por la torre colectora, está dada por $h_i + r_i$ donde

$$h_i = [D_i + (L_i - u) \cos \alpha_i] \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha_i \right) + (L_i - u) \operatorname{sen} \alpha_i, \quad 0 \leq u \leq L_i. \quad (3.3)$$

La condición para que el rayo reflejado choque con el colector en la torre está dada ahora por:

$$H \leq h_i + r_i \leq H + R.$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$B_i - H - R + r_i \leq A_i u \leq B_i - H + r_i, \quad (3.4)$$

donde

$$A_i = (\cos \alpha_i) \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha_i \right) + \operatorname{sen} \alpha_i,$$

$$B_i = D_i \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha_i \right) + L_i A_i.$$

Como en la sección anterior, $A_i > 0$ si y solo si

$$\alpha_i < \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Tenemos entonces que la solución de la desigualdad (3.4) es

$$u_m^{(i)} \leq u \leq u_M^{(i)},$$

donde

$$\begin{aligned} u_m^{(i)} &= \frac{B_i - H - R + r_i}{A_i}, & u_M^{(i)} &= \frac{B_i - H + r_i}{A_i}, & \text{si } \alpha_i < \frac{\pi}{2} + \beta, \\ u_m^{(i)} &= 0, & u_M^{(i)} &= 0, & \text{si } \alpha_i \geq \frac{\pi}{2} + \beta. \end{aligned}$$

Tomando en consideración que $0 \leq u \leq L_i$, tenemos que $U_m^{(i)} \leq u \leq U_M^{(i)}$ donde

$$\begin{aligned} U_m^{(i)} &= \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_m^{(i)} < 0, \\ \min\{L_i, u_m^{(i)}\} & , \text{ de lo contrario,} \end{cases} \\ U_M^{(i)} &= \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_M^{(i)} \leq 0, \\ \min\{L_i, u_M^{(i)}\} & , \text{ de lo contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así que la cantidad de luz recibida por el receptor por concepto del espejo i es proporcional a $U_M^{(i)} - U_m^{(i)}$, y por consiguiente, la correspondiente del arreglo de los n espejos es proporcional a:

$$\sum_{i=1}^n (U_M^{(i)} - U_m^{(i)}). \quad (3.5)$$

3.1 Interferencia entre espejos

La expresión (3.5) no toma en consideración las posibles interferencias entre espejos. Vamos a suponer que estas interferencias ocurren únicamente entre un espejo dado y el que esta en frente de éste. Examinaremos dos tipos de interferencia: aquella cuando un rayo de luz reflejado por un espejo choca con el espejo de enfrente (*interferencia por reflexión*), y cuando el espejo de enfrente bloquea parcial o totalmente al espejo detrás de éste (*interferencia por bloqueo*).

3.1.1 Interferencia por reflexión

En referencia a la Figura 3, tenemos que podemos tratar este caso como uno donde el rayo reflejado debe chocar con una “torre” ficticia de altura

$L_{i-1} \sin \alpha_{i-1}$. Usando que el borde inferior del i -ésimo espejo, está a una distancia de $D_i - D_{i-1} - L_{i-1} \cos \alpha_{i-1}$ de esta torre ficticia, tenemos sustituyendo ésto por D en la formula (2.1), que la altura h_i que se muestra en la Figura 3 está dada por

$$h_i = [D_i - D_{i-1} - L_{i-1} \cos \alpha_{i-1} + (L_i - u) \cos \alpha_i] \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha_i \right) + (L_i - u) \sin \alpha_i, \quad 0 \leq u \leq L_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

En la Figura 3 los espejos se muestran al mismo nivel, pero tomando en consideración que se encuentran a alturas r_{i-1}, r_i respectivamente, tenemos que la *condición de interferencia por reflexión* entre los espejos $i - 1$ e i es que:

$$0 \leq h_i + r_i - r_{i-1} \leq L_{i-1} \sin \alpha_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Despejando esta desigualdad para u llegamos a que

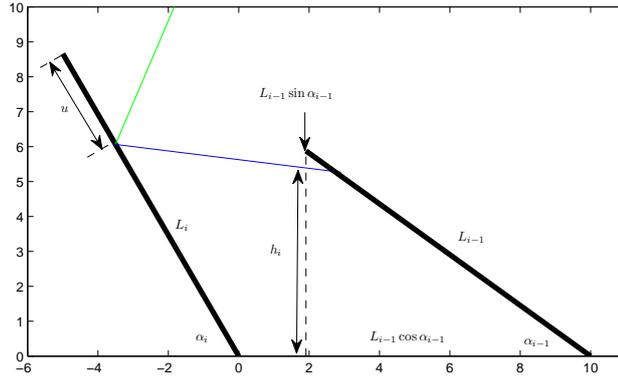


Figura 3: Diagrama ilustrando un rayo reflejado (azul) interfiriendo con el espejo de enfrente.

$$b_m^{(i)} \leq u \leq b_M^{(i)},$$

donde

$$b_m^{(i)} = \frac{C_i + r_i - r_{i-1} - L_{i-1} \sin \alpha_{i-1}}{A_i}, \quad b_M^{(i)} = \frac{C_i + r_i - r_{i-1}}{A_i}, \quad \text{si } \alpha_i < \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$b_m^{(i)} = 0, \quad b_M^{(i)} = 0, \quad \text{si } \alpha_i \geq \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$C_i = (D_i - D_{i-1} - L_{i-1} \cos \alpha_{i-1}) \tan \left(\frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha_i \right) + L_i A_i.$$

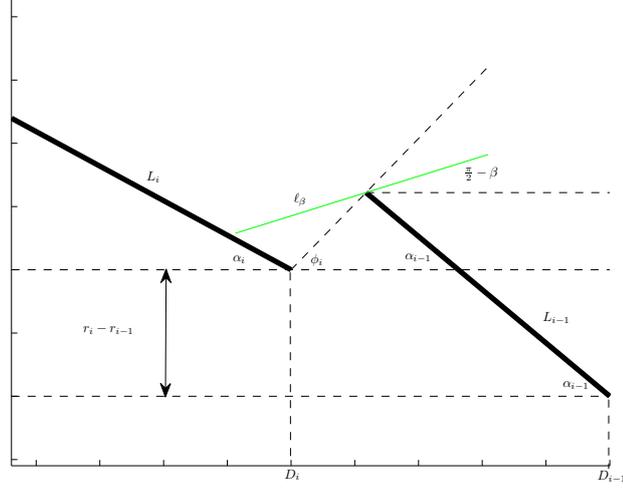


Figura 4: Rayo incidente (verde) haciendo un ángulo β con la vertical que satisface la condición de interferencia por bloqueo $\frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i$.

Tomando en consideración que $0 \leq u \leq L_i$, tenemos que

$$B_m^{(i)} \leq u \leq B_M^{(i)},$$

donde

$$B_m^{(i)} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } b_m^{(i)} < 0, \\ \min\{L_i, b_m^{(i)}\} & , \text{ de lo contrario,} \end{cases}$$

$$B_M^{(i)} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } b_M^{(i)} \leq 0, \\ \min\{L_i, b_M^{(i)}\} & , \text{ de lo contrario.} \end{cases}$$

3.1.2 Interferencia por bloqueo

En referencia a la Figura 4, definimos ϕ_i como el ángulo (con respecto a la horizontal) que hace el segmento que une la parte inferior del i -esimo espejo con la parte superior del espejo $i - 1$. Usando la información de la figura, se puede verificar que

$$\tan \phi_i = \frac{\nu_i}{\omega_i}, \quad (3.6)$$

donde

$$\nu_i = L_{i-1} \sin \alpha_{i-1} - (r_i - r_{i-1}), \quad (3.7a)$$

$$\omega_i = D_i - D_{i-1} - L_{i-1} \cos \alpha_{i-1}. \quad (3.7b)$$

Como $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ podemos suponer que $\nu_i \geq 0$. (De lo contrario no habría interferencia por bloqueo.) Tenemos que el ángulo $\phi_i \in (0, \pi)$ está dado por

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad \omega_i = 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{\nu_i}{\omega_i}\right) & , \quad \omega_i > 0, \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{\nu_i}{\omega_i}\right) & , \quad \omega_i < 0. \end{cases}$$

Se deduce entonces que la condición necesaria para *interferencia por bloqueo* es que el rayo de luz incidente cumpla con

$$\frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i.$$

No todos los rayos incidentes que cumplan con esta condición hay que descartarlos. Se descartarán solo aquellos rayos incidentes debajo de la recta incidente (ℓ_β) que se muestra en la Figura 4, y que chocarían con el espejo i de no estar el espejo $i - 1$. Necesitamos pues buscar la intersección de la recta ℓ_β con la recta determinada por el espejo i . Se puede verificar que esta intersección ocurre en el punto con abscisa³:

$$x = -D_i + \frac{\omega_i \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) - \nu_i}{\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) + \tan \alpha_i}. \quad (3.8)$$

Se puede verificar (Apéndice A) que siempre $x \leq -D_i$. No obstante, para garantizar que el punto con esta abscisa corresponda a un punto en el espejo i , modificamos x a:

$$\hat{x} = \max \{-D_i - L_i \cos \alpha_i, x\}.$$

³Para obtener la expresión de la abscisa del punto de intersección, se colocó el eje de "y" en la torre colectora. Al hacer ésto, la parte inferior del i -ésimo espejo tiene abscisa $-D_i$.

El punto en el espejo i que buscamos⁴ tiene coordenadas (\hat{x}, \hat{y}) donde⁵

$$\hat{y} = r_i - (\hat{x} + D_i) \tan \alpha_i.$$

La interferencia por bloqueo está dada entonces por el intervalo $[\hat{u}^{(i)}, L_i]$ donde

$$\hat{u}^{(i)} = [(\hat{x} + D_i + L_i \cos \alpha_i)^2 + (r_i + L_i \sin \alpha_i - \hat{y})^2]^{1/2}.$$

3.1.3 Formula para la recolección neta

La interferencia del espejo i es la intersección del intervalo $[U_m^{(i)}, U_M^{(i)}]$ con la unión de los intervalos $[B_m^{(i)}, B_M^{(i)}]$ y $[\hat{u}^{(i)}, L_i]$. Las u 's correspondientes a esta intersección, se tienen que eliminar de $[U_m^{(i)}, U_M^{(i)}]$, quedando el conjunto

$$I_i = [U_m^{(i)}, U_M^{(i)}] \setminus \left\{ [B_m^{(i)}, B_M^{(i)}] \cup [\hat{u}^{(i)}, L_i] \right\}.$$

Podemos ahora modificar la suma (3.5) para obtener que la cantidad de luz total recibida (eliminando la interferencia) por el receptor es proporcional a:

$$U_M^{(1)} - U_m^{(1)} + \sum_{i=2}^n \text{largo}(I_i).$$

Esta expresión corresponde al ángulo de incidencia β . Para ángulos incidentes β tal que $\beta_0 < \beta < \beta_1$, tendríamos que la recolección total está dada por:

$$I = \int_{\beta_0}^{\beta_1} \left[U_M^{(1)} - U_m^{(1)} + \sum_{i=2}^n \text{largo}(I_i) \right] d\beta. \quad (3.9)$$

Note que I es una función de los r_i 's, α_i 's, L_i 's, y D_i 's. El problema es determinar para que valores de éstas variables, la función I asume un valor máximo sujeto a que:

$$0 \leq r_i \leq r_M, \quad 0 \leq D_i \leq D_M, \quad 0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n,$$

donde r_M y D_M son valores dados. Para las L_i 's podemos suponer que son dadas de antemano o que $0 \leq L_i \leq L_M$ para $i = 1, 2, \dots, n$, con L_M

⁴Este punto no es necesariamente el de intersección entre ℓ_β con la recta determinada por el espejo i , pero es un punto en el espejo L_i .

⁵La ecuación de la recta que pasa por el espejo i es $y = r_i - (x + D_i) \tan \alpha_i$.

dato. Finalmente, si los espejos están colocados en una ladera o montaña con ángulo de inclinación γ , entonces los r_i 's quedan prescritos por:

$$r_i = (D_i - F) \tan \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde F es la distancia desde la falda de la montaña a la torre colectora, y los ángulos α_i 's ahora deben cumplir con $\gamma \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

4 Resultados numéricos

Se desarrolló un programa utilizando la función `fmincon` de MATLAB para aproximar un máximo de (3.9) cuando los espejos se colocan en una ladera con ángulo γ de inclinación y con los largos de los espejos dados. Las desconocidas en este caso son los $\{D_i\}$ y los $\{\alpha_i\}$ que deben cumplir con las restricciones de que:

$$0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n \leq D_M, \quad \gamma \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}.$$

La integral en (3.9) se aproximó utilizando la regla del trapecio.

Para la simulación se utilizaron $n = 6$ espejos colocados en una ladera con inclinación de $\frac{\pi}{6}$. La base de la ladera se colocó a 30 metros de la torre colectora la cual tiene 100 metros de altura con un colector de 10 metros. Se tomó $D_M = 100$ metros y el largo de los espejos fue de 10 metros cada uno. Los ángulos y distancias iniciales de la base de los espejos a la torre colectora se tomaron como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.4, \quad \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.2, \quad \alpha_4 = 0.2, \quad \alpha_5 = 0.2, \quad \alpha_6 = 0.2, \\ D_1 = 30, \quad D_2 = 40, \quad D_3 = 50, \quad D_4 = 60, \quad D_5 = 70, \quad D_6 = 80. \end{aligned}$$

Se le asignó la opción a la subrutina `fmincon` para que aproximará las derivadas requeridas usando diferencias finitas. Luego de 176 iteraciones la subrutina `fmincon` se detuvo con un valor máximo aproximado para (3.9) de 3.783222. Los valores óptimos obtenidos para los $\{D_i\}$ y los $\{\alpha_i\}$ fueron:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.7232, \quad \alpha_2 = 0.8075, \quad \alpha_3 = 0.8852, \\ \alpha_4 = 0.9329, \quad \alpha_5 = 1.0265, \quad \alpha_6 = 1.1508, \\ D_1 = 48.1124, \quad D_2 = 57.7566, \quad D_3 = 67.6514, \\ D_4 = 78.0197, \quad D_5 = 89.4054, \quad D_6 = 99.1914, \end{aligned}$$

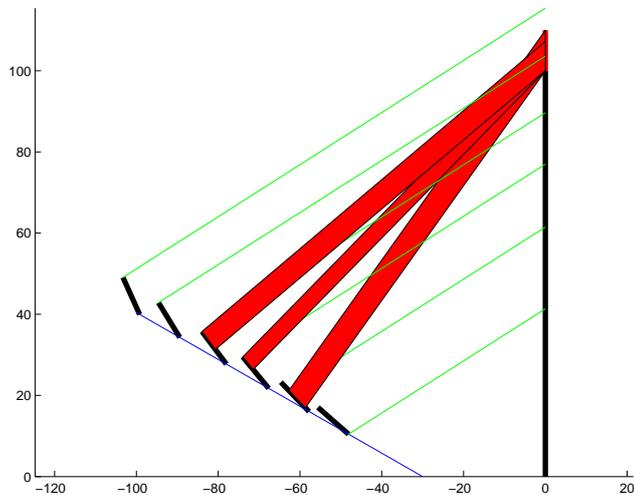


Figura 5: Arreglo óptimo para seis espejos colocados en una ladera. Los haces rojos representan los bloques de luz reflejados y las líneas verdes representan algunos de los rayos incidentes para $\beta = 1$.

con un error relativo del orden de 10^{-6} . Note que la solución óptima coloca los espejos a unas distancias entre ellos de aproximadamente unos 10 metros minimizando o reduciendo así las interferencias entre espejos. Igualmente observe que los espejos más cerca de la torre están más inclinados que los espejos más distantes. Esto resulta en que los espejos que están más cerca colectan la mayor parte de la luz en la mañana ($\beta \approx \frac{\pi}{2}$), mientras los espejos más distantes colectan la mayor parte de la luz cerca de media mañana en adelante. En la Figura 5 mostramos un diagrama del arreglo de espejos óptimo al momento en que $\beta = 1$. Los haces rojos representan los bloques de luz reflejados por los espejos correspondientes mientras que las líneas verdes representan algunos de los rayos incidentes.

5 Conclusiones

Hemos presentado un modelo bastante simple de un sistema para la recolección de luz solar que consiste de un arreglo de espejos y una torre colectora. El modelo permite que los espejos puedan estar a alturas diferentes como sería en el caso en que éstos se colocan en la ladera de una montaña. El modelo

se puede utilizar determinar de forma numérica los parámetros geométricos del sistema que maximizan la recolección total de luz. No obstante, para poder derivar conclusiones de utilidad más práctica, es necesario incorporar al modelo varios de las consideraciones físicas y de ingeniería que se han dejado fuera. Por ejemplo, el problema real es uno en tres dimensiones donde los rayos incidente y reflejados están caracterizados por dos ángulos. Más aún, los espejos no son necesariamente reflectores perfectos ya que siempre hay absorción por parte de éstos, al igual que el colector de la torre que no tiene un grado de absorción total o perfecto. También está el asunto del ángulo de salida y puesta del sol, cuan alto éste cruza durante el día, efectos atmosféricos, cosas que dependen en gran parte de la localización (latitud y longitud) del arreglo de espejos. En un trabajo futuro estudiaremos un modelo que considere algunos o todos de estos aspectos.

A Sobre la intersección de ℓ_β con L_i

En este apéndice verificamos que la abscisa x (cf. (3.8)) de la intersección entre ℓ_β y la recta determinada por el espejo L_i (Figura 4), satisface que $x \leq -D_i$. Recuerde que estamos suponiendo que en (3.6) siempre $\nu_i \geq 0$ por lo que es suficiente considerar solo el signo de ω_i .

1. (Caso $\omega_i \geq 0$) En este caso $\phi_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Como $\frac{\pi}{2} - \beta \in [0, \pi]$, la condición de interferencia por bloqueo $\frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i$ entonces garantiza que $\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) > 0$. Si $\omega_i = 0$ tenemos inmediatamente de (3.8) que $x \leq -D_i$. Si $\omega_i > 0$, entonces la condición de interferencia por bloqueo implica que $\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) < \tan \phi$, es decir que

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) - \tan \phi < 0.$$

Si re-escribimos (3.8) como:

$$x = -D_i + \omega_i \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) - \tan \phi_i}{\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) + \tan \alpha_i} \right], \quad (\text{A.10})$$

tenemos entonces que también $x \leq -D_i$.

2. (Caso $\omega_i < 0$) En este caso $\phi_i \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. La condición de interferencia por bloqueo $\frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i$ incluye la posibilidad de que $\frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2}$,

i.e., $\beta = 0$. En tal caso ℓ_β es vertical (Figura 4) por lo que hay que modificar (3.8) a $x = -D_{i-1} - L_{i-1} \sin \alpha_{i-1}$. De $\omega_i < 0$, tendríamos inmediatamente que $x \leq -D_i$. Tenemos ahora dos sub-casos.

(a) ($\beta > 0$) En este caso $\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) > 0$, y como $\tan \phi_i < 0$, tenemos de (A.10) que $x \leq -D_i$.

(b) ($\beta < 0$) La condición básica de reflexión $\alpha_i < \frac{\pi}{2} + \beta$ garantiza ahora que:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \beta < \pi - \alpha_i < \pi.$$

Tenemos entonces que $\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) < \tan(\pi - \alpha_i) = -\tan \alpha_i$, es decir que

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) + \tan \alpha_i < 0.$$

De la condición de interferencia por bloqueo $\frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i$ tenemos que

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \beta < \phi_i < \pi,$$

por lo que $\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) < \tan \phi_i$, es decir que

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) - \tan \phi_i < 0.$$

Tenemos ahora usando (A.10) que nuevamente $x \leq -D_i$.

Referencias

- [1] King, S., Beck, F., and Lüttge, U., *On the mystery of the golden angle in phyllotaxis*, Plant, Cell and Environment, **27**: 685-695, 2004.
- [2] Noone, C.J., Torrilhon, M., and Mitsos, A., *Heliostat field optimization: A new computationally efficient model and biomimetic layout*, Solar Energy, **86**: 792-803, 2012.