Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
Humacao, Puerto Rico 00791

Programa BRIDGES Modelaje Matemático Dr. Pablo Negrón

Laboratorio II: Ecuaciones de Recurrencias

Las ecuaciones de recurrencias se usan para describir fenómenos que varían o cambian en ciclos o etapas. Por ejemplo

- la cantidad de dinero en una cuenta de ahorro al final del año;
- crecimiento de poblaciones dividas en grupos por edades;
- poblaciones de organismos con ciclos de vida distintos, etc..

En este laboratorio usaremos la notación de sucesiones para denotar cantidades que varían por ciclos o etapas. Por ejemplo p_1 podría denotar una cierta población al final del primer ciclo, y en general p_n denota la población despúes de n ciclos.

División Celular

Suponga que una cierta población de células se multiplica de modo que en cada generación, cada miembro de la población genera a células hijas. Denotando la población de células en la generación n por C_n tenemos que esta satisface la *ecuación de recurrencia lineal de primer orden*:

$$C_{n+1} = aC_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{1}$$

donde C_0 denota la cantidad inicial de células. Note ahora que

$$C_{n+1} = aC_n = a(aC_{n-1}) = a(a(aC_{n-2})) = \cdots = a^{n+1}C_0,$$

o en términos de la n–esima generación:

$$C_n = a^n C_0. \tag{2}$$

La ecuación (2) representa la *solución* de la ecuación de recurrencia (1) y a partir de la población inicial nos permite predecir la población en un numero pre–determinado de generaciones. El programa `cell_model(a,C0,n)` en MATLAB calcula las primeras `n` poblaciones de acuerdo al modelo (2) y las traza en una gráfica. Aunque en nuestras consideraciones sobre células el parámetro a debe ser positivo, la solución (2) de (1) es valida para a negativo igualmente.

Ejercicio 0.1. Tomando $C_0 = 1$ y usando el programa `cell_model`, experimente con distintos valores de a y determine cual es el comportamiento general de la población según la a cambia. ¿Cómo cambiarían sus conclusiones si cambia el valor de C_0.

El modelo descrito sobre crecimiento de células es bien simple y no toma en consideración factores de muerte de células, limitaciones de alimento, espacio, etc.. La forma mas sencilla de incluir estos factores en el modelo es reemplazando la constante a en (1) por una función lineal decreciente en C_n. Esto es:

$$C_{n+1} = (a - bC_n)C_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Esto se conoce como el *modelo logístico* de crecimiento y es un ejemplo de una *recurrencia nolineal de orden uno*. El programa `logistic(a,b,C0,n)` calcula y traza las primeras `n` generaciones de la población de acuerdo al modelo (3).

Ejercicio 0.2. Usando los valores de $a = 2$, $b = 0.1$, experimente con el programa `logistic` para los valores 5, 10, 15 de `C0`. El valor de $(a-1)/b$ se conoce como el *punto de saturación* de la población.

Crecimiento Anual de Plantas

Plantas con un ciclo de vida anual producen semillas al final del verano. Luego de florecer, las plantas se marchitan y mueren dejando su prole en forma de semillas las cuales deben sobrevivir el invierno para dar paso a una nueva generación. En la primavera una cierta fracción de estas semillas germina. Algunas de las semillas permanecen en el terreno por un año o mas antes de germinar. Otras pueden perderse por factores del tiempo, enfermedades, depredadores, etc..

Vamos a describir ahora un modelo para el crecimiento de las plantas. Las plantas producen semillas al final de su época de crecimiento, digamos Agosto. Una fracción de estas semillas sobrevive el invierno de las cuales una porción germina aproximadamente en Mayo. La fracción que germina depende de la edad de las semillas. Comenzamos definiendo unos parámetros característicos del modelo:

$\gamma =$ numero de semillas que produce una planta en Agosto;

$\alpha =$ fracción de las semillas de un año que germina en Mayo;

$\beta =$ fracción de las semillas de dos años que germina en Mayo;

$\sigma =$ fracción de las semillas que sobreviven el invierno.

El banco de semillas puede cambiar varias veces durante el año como resultado de germinación de semillas, producción de nuevas semillas, y muerte de semillas por edad u otros factores. Para simplificar vamos a suponer que las semillas no duran mas de dos años. Con esto en mente definimos las siguientes poblaciones:

$p_n =$ numero de plantas en la generación n;

$S_n^1 =$ numero de semillas en Abril de un año de edad antes de germinar;

$S_n^2 =$ numero de semillas en Abril de dos años de edad antes de germinar;

$\bar{S}_n^1 =$ numero de semillas de un año que quedan después de germinar en Mayo;

$\bar{S}_n^2 =$ numero de semillas de dos año que quedan después de germinar en Mayo;

$S_n^0 =$ numero de semillas nuevas producidas en Agosto.

Los parámetros $\gamma, \alpha, \beta, \sigma$ están relacionados a las poblaciones $p_n, S_n^1, S_n^2, \bar{S}_n^1, \bar{S}_n^2, S_n^0$ mediante las siguientes ecuaciones de recurrencia:

1. La población de plantas en la n–esima generación consiste de las plantas que germinan a partir de semillas de un año de viejas (αS_n^1) mas las que germinan a partir de semillas de dos años de viejas (βS_n^2). Esto lo podemos escribir como:
$$p_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2. \tag{4}$$

2. El banco de semillas cambia como resultado de germinación. La fracción de las semillas de un año que no germina es $1 - \alpha$ y la de dos años $1 - \beta$. Tenemos entonces que:
$$\bar{S}_n^1 = (1-\alpha) S_n^1 \quad , \quad \bar{S}_n^2 = (1-\beta) S_n^2. \tag{5}$$

3. En agosto nuevas semillas se producen a razón de γ por planta, es decir:
$$S_n^0 = \gamma p_n. \tag{6}$$

4. En el invierno el banco de semillas cambia por mortalidad y vejes. Las semillas nuevas de la generación n que sobreviven el invierno tendrán un año en la generación $n+1$. Las semillas de un año que sobreviven el invierno tendrán dos años en la generación $n+1$. Esto lo expresamos mediante:
$$S_{n+1}^1 = \sigma S_n^0 \quad , \quad S_{n+1}^2 = \sigma \bar{S}_n^1. \tag{7}$$

Estas recurrencias las podemos reducir a dos ecuaciones para las poblaciones de plantas y semillas de un año. Primero observe que combinando la primera ecuación en (7) con (6) obtenemos que:
$$S_{n+1}^1 = \sigma(\gamma p_n). \tag{8}$$

Ahora de la segunda ecuación en (7) y la primera ecuación en (5) tenemos que:
$$S_{n+1}^2 = \sigma(1-\alpha) S_n^1. \tag{9}$$

Si escribimos la ecuación (4) en términos de la generación $n+1$ tenemos que:

$$p_{n+1} = \alpha S^1_{n+1} + \beta S^2_{n+1}. \tag{10}$$

Ahora combinando (8), (9), y (10) obtenemos el sistema reducido de recurrencias:

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma(1-\alpha)S^1_n, \tag{11}$$
$$S^1_{n+1} = \sigma\gamma p_n. \tag{12}$$

El programa `plant_model(gamma,alpha,beta,sigma,S0,N)` calcula las poblaciones p_n, S^0_n, S^1_n, S^2_n para los parámetros especificados, el numero inicial de semillas `S0`, y el numero de generaciones `N`.

Ejercicio 0.3. Para los valores de

a) $\alpha = 0.5, \beta = 0.25, \gamma = 2.0, \sigma = 0.8$,

b) $\alpha = 0.6, \beta = 0.30, \gamma = 2.0, \sigma = 0.8$,

y usando el programa `plant_model` calcule las poblaciones p_n, S^0_n, S^1_n, S^2_n para 20 generaciones. De la gráfica de p_n versus n determine si la población de plantas sobrevive o desaparece. Experimente con otros valores. Por ejemplo manteniendo β, σ, γ fijos, varíe α para estudiar el efecto de este parámetro en la población. Con $\alpha = \beta = 0.001$ y $\sigma = 1$, ¿cúan grande debe ser γ para que la población de plantas aumente en tamaño?

En el modelo de plantas descrito se han hecho varias suposiciones. Por ejemplo no hemos considerado interacciones entre plantas, la germinación y sobrevivencia de semillas en varias generaciones, y que los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ permanecen constante de generación a generación. Todos estos factores pueden considerados pero complican el modelo grandemente.

Las recurrencias (11), (12) todavía las podemos reducir a una sola recurrencia para p_n. De hecho escribiendo (12) en términos de la n–esima generación, tenemos que $S^1_n = \sigma\gamma p_{n-1}$. Sustituyendo esto en (11) obtenemos:

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-1}. \tag{13}$$

Esto es un ejemplo de una *ecuación de recurrencia lineal de orden dos*. Poniendo $a = \alpha\sigma\gamma$ y $b = \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma$, podemos escribir la recurrencia de arriba como:

$$p_{n+1} - ap_n - bp_{n-1} = 0.$$

Si buscamos soluciones de la forma $p_n = \lambda^n$ vemos que λ satisface la ecuación cuadrática:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

Esta ecuación tiene como soluciones:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2+4b}\right) = \frac{\sigma\gamma\alpha}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+\delta}\right), \tag{14}$$

donde

$$\delta = \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}. \tag{15}$$

La solución de (13) se puede escribir ahora como:

$$p_n = c_1\lambda_+^n + c_2\lambda_-^n, \tag{16}$$

donde c_1, c_2 dependen de las poblaciones iniciales p_0, p_1.

Note que como $0 \leq \alpha \leq 1$ ya que representa la fracción de las semillas de un año que germina en Mayo, entonces $\delta \geq 0$ y por consiguiente $\lambda_+ \geq 0$ y $\lambda_- \leq 0$. Usando esta información se puede ahora verificar que la población de plantas aumenta con el numero de generaciones si los parámetros α, β, γ, σ satisfacen:

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{17}$$

Referencias

[1] Edelstein–Keshet, Mathematical Models in Biology, The Random House/Birkhäuser Mathematics Series, New York, 1988.