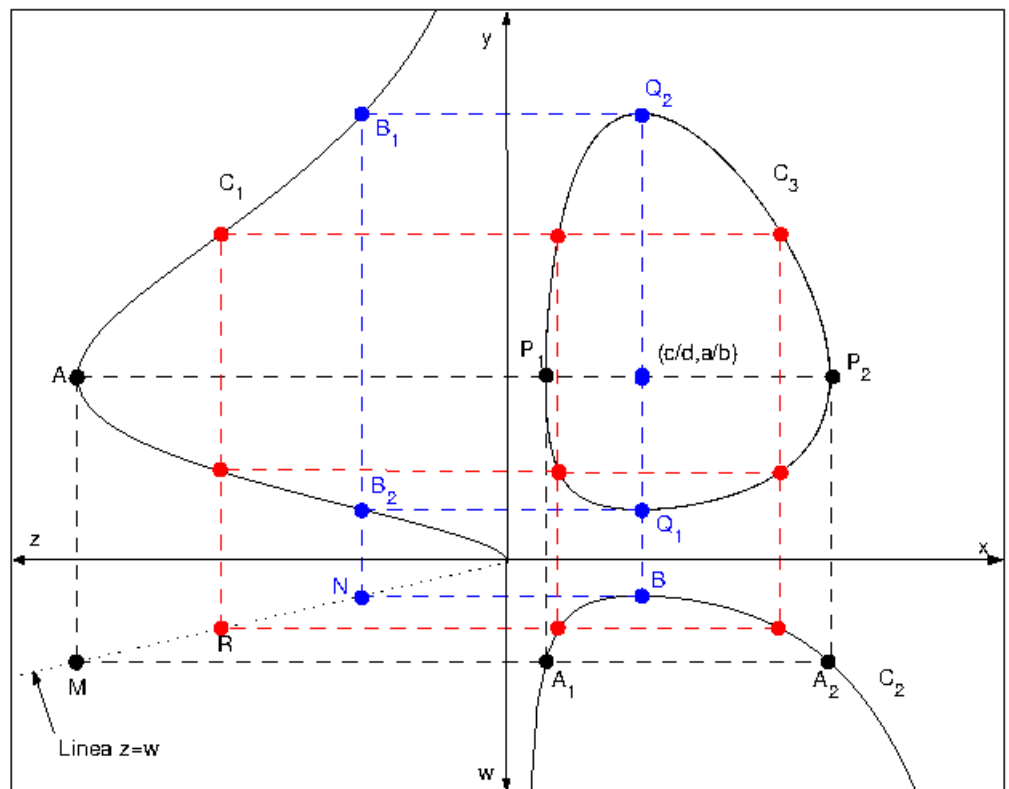


Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pablo V. Negrón Marrero



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pablo V. Negrón Marrero
Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
Humacao, PR 00791

Derechos Reservados© 2021: Ninguna parte de este documento puede ser reproducida, o almacenada, o transmitida de cualquier forma o por medios electrónicos, mecánicos, o fotocopias, o de otra manera, sin el consentimiento previo del autor.

El diagrama de la portada ilustra un argumento utilizado por Volterra para probar la existencia de trayectorias cerradas en el modelo presa–depredador propuesto por Lotka–Volterra (1925).

Tabla de Contenido

Prefacio	iv
1 ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?	1
1.1 Algunas clasificaciones y aplicaciones	1
1.2 Ecuaciones diferenciales escalares	7
1.3 Teoría de existencia y unicidad	9
1.4 Ejercicios	13
2 Ecuaciones de primer orden	16
2.1 Métodos cualitativos	17
2.1.1 Campos de direcciones	17
2.1.2 Ecuaciones autónomas	20
2.2 Métodos analíticos o exactos	26
2.2.1 Ecuaciones lineales	26
2.2.2 Ecuaciones separables	31
2.2.3 Ecuaciones exactas	33
2.2.4 Factores integrantes	37
2.2.5 Ecuaciones homogéneas	39
2.2.6 Ecuación de Bernoulli	41
2.3 Algunas aplicaciones	42
2.3.1 Modelos de poblaciones	42
2.3.2 Circuitos eléctricos	46
2.4 Ejercicios	47
3 Ecuaciones de segundo orden	54
3.1 Ecuaciones reducibles a primer orden	55
3.2 Ecuaciones lineales	57
3.2.1 La ecuación homogénea	58

3.2.2	Construcción de conjuntos fundamentales	61
3.2.3	La ecuación no-homogénea	66
3.2.4	Construcción de soluciones particulares	66
3.3	Vibraciones mecánicas	76
3.3.1	Vibraciones libres y sin fricción	77
3.3.2	Vibraciones libres con fricción	79
3.3.3	Vibraciones forzadas	82
3.4	Generalizaciones: ecuaciones de orden n	87
3.5	Problemas de frontera de Sturm-Liouville	91
3.6	Funciones de Green	94
3.7	Ejercicios	99
4	Sistemas Autónomos 2×2	105
4.1	Definiciones y resultados básicos	105
4.2	El Plano Fase – Sistemas Lineales	111
4.2.1	Raíces reales distintas y del mismo signo	115
4.2.2	Raíces reales con signos distintos	119
4.2.3	Raíces iguales	120
4.2.4	Raíces complejas	123
4.2.5	Determinante Zero	127
4.3	El Plano Fase–Sistemas Nolineales	130
4.3.1	El Péndulo Simple con Fricción	131
4.3.2	Modelos Ecológicos de Presa–Depredador	135
4.3.3	Especies en Competencia	137
4.3.4	Sistema de Masa–Resorte Nolineal	142
4.4	Ejercicios	147
5	Métodos de series de potencias	152
5.1	Conceptos básicos de series de potencias	152
5.2	Puntos ordinarios	155
5.3	Puntos singulares regulares	162
5.3.1	Ecuación de Euler–Cauchy	164
5.3.2	Caso general	166
5.4	La ecuación de Bessel	173
5.4.1	Algunas propiedades de las funciones de Bessel	175
5.4.2	Series de Bessel	178
5.5	Ejercicios	180

6	Transformadas de Laplace	184
6.1	Definiciones y propiedades básicas	184
6.2	Funciones escalonadas	190
6.3	Funciones de tipo impulso: la delta de Dirac	196
6.4	Transformadas de las funciones de Bessel	200
6.5	Más formulas de transformadas	203
6.6	Ejercicios	205
7	Métodos numéricos	211
7.1	El método de Euler	211
7.2	Métodos Runge–Kutta	214
7.3	Ejercicios	219
8	Ecuaciones diferenciales parciales	222
8.1	Series de Fourier	222
8.2	La Ecuación de Calor	229
8.3	La Ecuación de Onda	233
8.4	La Ecuación de Laplace	236
8.5	Ejercicios	239
9	Sistemas Lineales $n \times n$	244
9.1	Notación y Definiciones	244
9.2	Sistemas Homogéneos	246
9.2.1	Independencia Lineal	246
9.2.2	Problema de valor inicial	250
9.3	Sistemas No–homogéneos	251
9.4	Sistemas con coeficientes constantes	253
9.4.1	Valores propios reales y distintas	254
9.4.2	Valores propios complejos y distintos	256
9.4.3	Valores propios repetidos	258
9.5	Las ecuaciones de Frenet	267
9.6	Ejercicios	270
A	El conjunto de los números complejos	275
	Referencias	278
	Indice	278

Prefacio

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar procesos donde es razonable suponer que las cantidades envueltas varían de forma “continua”. Si dichas cantidades se representan por una o más funciones (llamadas *las desconocidas*), entonces una *ecuación diferencial* es una ecuación que envuelve derivadas de éstas funciones con respecto a una o más variables independientes. A diferencia de una ecuación algebraica, como por ejemplo una ecuación cuadrática o polinómica cuyas soluciones son números, una solución de una ecuación diferencial es una función. Es por esto que el proceso de buscar soluciones de ecuaciones diferenciales es uno más complicado o elaborado¹.

Cuando hablamos de resolver una ecuación diferencial, existen varias posibilidades o enfoques.

1. En los métodos exactos o analíticos, buscamos una solución exacta de la ecuación diferencial, esto es, en términos de una fórmula o ecuación. Como veremos, ésto es solo posible para ciertos tipos o clases de ecuaciones diferenciales.
2. Los métodos basados en expansiones asintóticas, producen una representación de la solución de la ecuación diferencial en una serie de potencias. Estos métodos aunque más generales que los exactos, nos dan una aproximación local (alrededor de un punto) de la solución.
3. Los métodos numéricos producen, al igual que los basados en expansiones asintóticas, una aproximación de la solución de la ecuación diferencial. Al contrario de las expansiones asintóticas, estas aproximaciones son globales, pero el grado de precisión usualmente no es tan bueno como el de las expansiones asintóticas.

¹No pretendemos implicar con ésto que el problema de buscar raíces de ecuaciones algebraicas sea uno simple o trivial.

Estos métodos o puntos de vistas tienen como objetivo primordial el de “cuantificar” la solución de la ecuación diferencial. Es posible también estudiar una ecuación diferencial de forma “cuálitativa”. Esto es, tratamos de obtener la mayor cantidad de información de las soluciones de la ecuación diferencial *sin resolver la ecuación*. Esto parecería difícil o imposible, pero como veremos más adelante, existen varias herramientas matemáticas que nos permiten hacer este tipo de análisis y que se pueden utilizar para estudiar una variedad bien amplia de ecuaciones diferenciales.

Para ilustrar algunos de estos conceptos, considere el caso de la ecuación diferencial:

$$y'(x) = y(x).$$

Esta ecuación lo que dice es que la función $y(x)$ es igual a su derivada. Del cálculo elemental sabemos que la función exponencial tiene esa propiedad, por lo que

$$y(x) = c e^x,$$

para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$. Esta expresión se llama la *solución exacta o solución general* de la ecuación diferencial.

Por el contrario, y sin resolver la ecuación diferencial $y' = y$, si examinamos ésta vemos que $y'(x) > 0$ si $y(x) > 0$, y que $y'(x) < 0$ si $y(x) < 0$. De este análisis podemos concluir que:

- cualquier solución de la ecuación diferencial que sea positiva en algún punto, se mantiene positiva y creciente en todo punto;
- o si es negativa en algún punto, entonces se mantiene negativa y decreciente en todo punto.

Esto es un análisis cuálitativo y note que no hizo falta tener a mano la solución exacta de la ecuación diferencial.

Finalmente, si quisiéramos aproximar numéricamente la solución de la ecuación diferencial, podríamos aproximar la derivada en la ecuación diferencial con un cociente diferencial, esto es:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

donde $h > 0$ es un número dado, generalmente pequeño. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial original y despejando, obtenemos que:

$$y(x+h) \approx y(x) + hy(x).$$

Partiendo del valor de $y(x)$ en un punto, digamos $y(x_0) = y_0$, podemos “iterar” esta ecuación obteniendo así una aproximación (en un número discreto de valores de x) de la solución (exacta) de la ecuación diferencial.

Cada uno de estos enfoques o puntos de vista serán estudiados en mayor o menor grado en este libro: métodos exactos o analíticos (Caps. 2, 3, 6 y 9), métodos basados en expansiones asintóticas (Caps. 5 y 8), métodos numéricos (Cap. 7), y métodos cualitativos (Caps. 2 y 4). En el Capítulo 1 se definen algunos de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales como el de solución, orden, clasificaciones, y se discute el teorema sobre la existencia y unicidad de soluciones a los llamados problemas de valor inicial.

Pablo V. Negrón Marrero
Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
Humacao, PR 00791

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales: que son, para que sirven, y cuando se pueden resolver

En este primer capítulo vamos a definir de forma más rigurosa lo que es una ecuación diferencial. Estudiaremos varias de las clasificaciones asociadas a estas ecuaciones como: ordinaria vs parcial, lineal vs no lineal, y lo que es el orden de la ecuación. Vamos a examinar el concepto de *solución* de una ecuación diferencial, y veremos que en general una ecuación diferencial tiene un número infinito de soluciones. Si especificamos una *condición inicial* (el estado inicial del sistema que describe la ecuación diferencial), entonces tenemos un *problema de valor inicial*, del cual estudiaremos las condiciones bajo las cuales estos problemas tienen solución única.

1.1 Algunas clasificaciones y aplicaciones

Las funciones cuyas derivadas aparecen en una ecuación diferencial se llaman las *desconocidas*. Si la ecuación diferencial envuelve solo una función desconocida, entonces decimos que la ecuación es *escalar*. De lo contrario, esto es, si tenemos dos o más funciones desconocidas, con la misma cantidad de ecuaciones, decimos que la ecuación diferencial es un *sistema*. El término “ecuación diferencial” se usa en general tanto para el caso escalar como para los sistemas.

Una ecuación diferencial se llama *ordinaria* si todas las funciones cuyas

derivadas aparecen en la ecuación, dependen de una sola variable independiente. De lo contrario, la ecuación diferencial se llama *parcial*. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de orden mayor que aparece en la ecuación diferencial. La ecuación diferencial es *lineal* si las funciones desconocidas y sus derivadas, aparecen de forma lineal en dicha ecuación. De lo contrario, decimos que la ecuación es *no lineal*. En la Tabla (1.1) mostramos varias ecuaciones diferenciales que ilustran estos conceptos.

Las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales son muchas y se utilizan en campos tan variados como las ciencias naturales, ingeniería, finanzas, ciencias sociales, etc., para nombrar solo algunos. Vamos ahora a discutir varios ejemplos de esto con un enfoque en aplicaciones a las ciencias naturales. Las soluciones o análisis de las ecuaciones resultantes en cada caso serán discutidas más adelante en el texto.

Ejemplo 1.1. Un tanque mantiene una mezcla de un cierto solúto con agua. Al tanque entra una mezcla del solúto a una tasa de r_i litros por minuto con una concentración de c_i kilogramos por litro. Del tanque sale mezcla a una tasa r_o y concentración c_o . Suponemos que en todo momento la mezcla en el tanque se mantiene uniforme. Tenemos entonces que $r_i c_i$ representa la cantidad de solúto que entra al tanque por unidad de tiempo (kilogramos por minuto). De igual forma $r_o c_o$ representa la cantidad de solúto que sale del tanque por unidad de tiempo. Si $x(t)$ representa la cantidad de solúto en el tanque en tiempo t , entonces podemos escribir que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = r_i c_i - r_o c_o.$$

Si r_i, r_o son constantes, entonces

$$c_o = \frac{x(t)}{V_0 + (r_i - r_o)t},$$

donde V_0 es el volumen inicial de la mezcla en el tanque. Sustituyendo esto en la ecuación anterior, tenemos que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt}(t) = r_i c_i - \frac{r_o x(t)}{V_0 + (r_i - r_o)t}, \quad (1.1)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, escalar, lineal, y de orden uno. En el caso especial que $r_i = r_o = r$, esta ecuación diferencial reduce a

$$\frac{dx}{dt}(t) = r c_i - kx(t), \quad k = \frac{r}{V_0}.$$

$\frac{dy}{dx}(x) - 4y(x) = 1$	escalar	ordinaria	lineal	orden uno
$x^2 dy + y dx = 0$	escalar	ordinaria	lineal en $y(x)$, nolineal en $x(y)$	orden uno
$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = u^2(t) + t \end{cases}$	sistema 2×2	ordinaria	nolineal	orden uno
$y''(x) + (\text{sen } x)y(x) = 0$	escalar	ordinaria	lineal	orden dos
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	escalar	parcial	lineal	orden dos
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	escalar	parcial	lineal	orden dos
$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$	escalar	parcial	nolineal	orden dos

Tabla 1.1: Algunas ecuaciones diferenciales y sus clasificaciones de acuerdo a si son escalares o sistemas, ordinaria o parcial, linealidad o no linealidad, y orden.

□

Ejemplo 1.2. Consideramos un sistema de masa–resorte (sin fricción) como se muestra en la Figura 1.1. Denotamos por $x(t)$ el desplazamiento de la masa m a partir de la posición de equilibrio (resorte sin alargar). Si k representa la

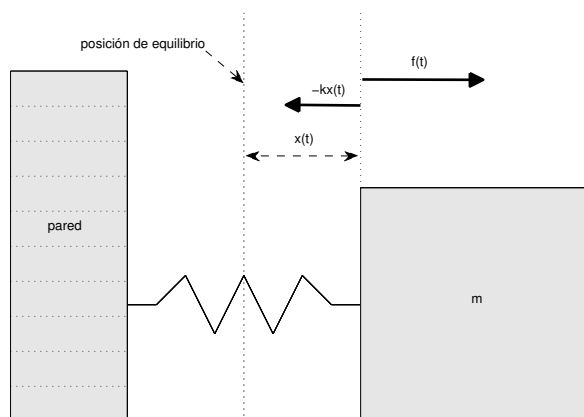


Figura 1.1: Sistema de masa-resorte.

constante del resorte, entonces éste ejerce una fuerza $-kx(t)$ sobre la masa. Usando la segunda ley de Newton, podemos escribir que:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t).$$

Si en adición suponemos que la masa m está sujeta a una fuerza externa $f(t)$, entonces la ecuación anterior queda ahora como:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

Ambas ecuaciones son escalares, de orden dos, y lineales. □

Ejemplo 1.3. Consideramos un sistema de una masa-péndulo donde suponemos que la masa del brazo del péndulo es mucho menor (se puede descartar) en comparación con la masa m . Las fuerzas actuando sobre la masa son la de gravedad y la tensión del brazo del péndulo que mantiene la masa a una distancia L (largo del brazo) del centro de rotación. El componente radial de la fuerza de gravedad balancea la fuerza de tensión del brazo. Si $\theta(t)$ denota el ángulo que hace el brazo del péndulo con la dirección vertical (hacia abajo), entonces la aceleración tangencial de la masa m es $L\ddot{\theta}(t)$ y el componente de la fuerza de gravedad en la dirección tangente es $-mg \sen \theta(t)$. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección tangencial, tenemos que:

$$mL\ddot{\theta}(t) = -mg \sen \theta(t),$$

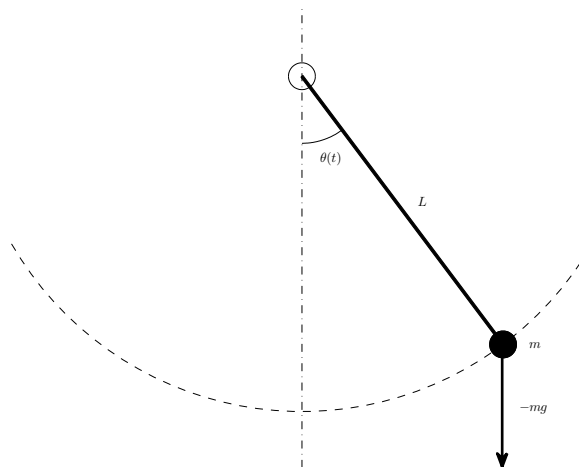


Figura 1.2: Sistema de masa-péndulo.

la cuál se puede escribir como:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin \theta(t) = 0.$$

Esta es una ecuación de orden dos y no lineal. □

Ejemplo 1.4. La ley de enfriamiento de Newton para un cuerpo a temperatura ambiente, establece que la razón o tasa de enfriamiento del cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del ambiente. Si $T(t)$ denota la temperatura del cuerpo en tiempo t , y T_0 es la temperatura ambiente, entonces podemos expresar esta ley con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - T_0),$$

donde $k < 0$ es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación es lineal y de orden uno. □

Ejemplo 1.5. Consideramos ahora un circuito eléctrico de una resistencia, inductancia, y capacitor conectados en serie y al cuál se le aplica un voltaje variable $V(t)$ como se muestra en la Figura 1.3. Si R , L , C representan la resistencia, inductancia, y capacitancia respectivamente, entonces las caídas

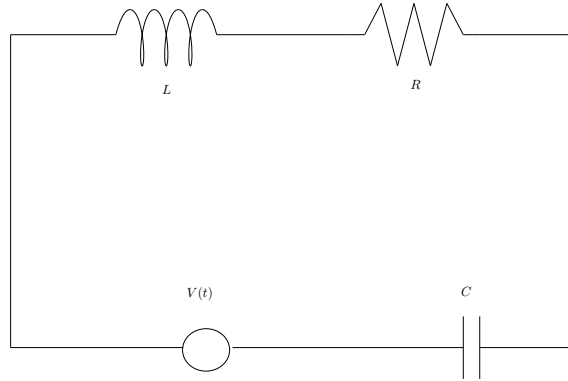


Figura 1.3: Circuito RLC en serie con voltage aplicado variable.

de voltaje correspondientes a estos elementos del circuito son $RI(t)$, $Q(t)/C$, y $LdI(t)/dt$ respectivamente, donde $I(t)$ es la corriente en el circuito en tiempo t , y $Q(t)$ es la carga almacenada en el capacitor en tiempo t . Tenemos que I y Q se relacionan por:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t).$$

Como la suma de las caídas de voltaje en el circuito tienen que sumar al voltaje aplicado, tenemos que:

$$L\frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t),$$

lo cuál, usando la relación entre $I(t)$ y $Q(t)$, lo podemos escribir como:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t),$$

Tenemos entonces una ecuación diferencial lineal de orden dos para $Q(t)$. \square

1.2 Ecuaciones diferenciales escalares: el concepto de solución

La forma general de una ecuación diferencial escalar de orden n para una función $y(x)$ tiene la forma:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.2)$$

para alguna función F . Es común escribir la ecuación (1.2) de forma corta como $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ donde se sobrentiende que y es función de x . En este libro utilizaremos casi siempre la notación larga dada en (1.2) y ocasionalmente ésta otra notación corta. Veremos más adelante que la ecuación diferencial también se puede expresar en forma diferencial, es decir usando diferenciales.

La ecuación diferencial (1.2) es *lineal* si F es una función lineal en $y(x)$, $y'(x)$, \dots , $y^{(n)}(x)$, esto es, si existen funciones $a_0(x)$, $a_1(x)$, \dots , $a_n(x)$, $g(x)$, tal que la ecuación (1.2) se puede escribir de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial lineal de orden uno tiene la forma general:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx}(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

De igual manera, la ecuación diferencial lineal de orden dos tiene la forma general:

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2}(x) + a_1(x) \frac{dy}{dx}(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

Un concepto bien importante relacionado con la ecuación (1.2) es el de “solución”. Decimos que una función $f(x)$ es una *solución* de (1.2) en el intervalo J , si al sustituir f por y en (1.2), la ecuación que resulta se cumple para toda $x \in J$. Esto es:

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in J.$$

El intervalo J más grande para el cuál ésto se cumple se llama el *intervalo máximo de solución o existencia*. El intervalo máximo de solución se puede determinar de forma relativamente fácil para las ecuaciones lineales. En el caso de las ecuaciones no lineales, ésto puede ser muy difícil o imposible.

Ejemplo 1.6. La función $f(x) = x^4/16$ es solución de

$$\frac{dy}{dx}(x) - x[y(x)]^{1/2} = 0,$$

en el intervalo $J = \mathbb{R}$. Para verificar ésto note que $f'(x) = x^3/4$ por lo que:

$$\frac{df}{dx}(x) - x[f(x)]^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\sqrt{\frac{x^4}{16}} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0,$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. De igual forma se puede verificar que $g(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$ es también solución de la ecuación diferencial y en el mismo intervalo.

Es fácil ver que las funciones $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \sin x$ son ambas soluciones de la ecuación:

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

en el intervalo $J = \mathbb{R}$. □

Ejemplo 1.7. La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define a $y(x)$ de forma implícita. Veamos que $y(x)$ es solución de:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Diferenciando implícitamente $x^2 + y^2 = 4$ con respecto a x , tenemos que:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando para dy/dx obtenemos la ecuación diferencial de arriba. El intervalo de existencia de la solución lo podemos determinar en este caso despejando $x^2 + y^2 = 4$ para y . En particular, tenemos que:

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{ó} \quad y(x) = -\sqrt{4 - x^2},$$

no ambas. Note que la ecuación diferencial es válida siempre y cuando $y \neq 0$. Así que el intervalo máximo de existencia de la solución es $(-2, 2)$. □

Una ecuación diferencial, en general, tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 1.8. Es fácil verificar que para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$, la función:

$$f(x) = \frac{c}{x} + 1, \quad (1.3)$$

es solución de la ecuación diferencial:

$$x \frac{dy}{dx}(x) + y(x) = 1,$$

en el intervalo $J = (0, \infty)$. Decimos que (1.3) es una *familia de soluciones* de la ecuación diferencial. Si fijamos el valor de c , digamos $c = -3$, entonces decimos que

$$y = -\frac{3}{x} + 1,$$

es una *solución particular* de la ecuación diferencial. □

Ejemplo 1.9. Se puede verificar que $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''(x) - y(x) = 0.$$

en el intervalo $J = \mathbb{R}$. Es fácil ver que para cualesquiera constantes c_1, c_2 , la función $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial en J . De hecho, como

$$f'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}, \quad f''(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

tenemos que

$$f''(x) - f(x) = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) - (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = 0,$$

para toda $x \in J$. Más adelante veremos que $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ es la *solución general* de la ecuación diferencial en el sentido de que cualquier otra solución de la ecuación se puede obtener a partir de $f(x)$ ajustando los valores de c_1, c_2 . □

1.3 Teoría de existencia y unicidad

En esta sección vamos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (1.2). Aunque nos limitaremos al caso $n = 1$ de ésta ecuación, las

conclusiones y resultados que veremos son igualmente válidos para ecuaciones de orden mayor de uno, incluso para sistemas.

En el caso $n = 1$, la ecuación (1.2) reduce a:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Vamos a suponer que ésta ecuación se puede escribir de la forma:

$$y'(x) = H(x, y(x)). \quad (1.4)$$

Es común buscar una solución de (1.4) que satisfaga la *condición inicial*:

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.5)$$

Aquí estamos suponiendo que el punto (x_0, y_0) pertenece al dominio de la función H . El problema de buscar una solución de (1.4) sujeto a (1.5) se llama un *problema de valor inicial* o PVI. El PVI de (1.4) sujeto a (1.5) lo escribimos como:

$$\begin{cases} y'(x) = H(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Aunque no lo especificamos, la solución $y(x)$ que buscamos debe estar definida y ser solución en un intervalo que contenga a x_0 .

Con relación al PVI (1.6) nos interesa contestar las siguientes preguntas:

- i) ¿Tiene o no solución el PVI?
- ii) ¿Será única la solución del PVI?
- iii) ¿Cómo podemos encontrar o calcular la solución del PVI?

En esta sección contestaremos las preguntas i) y ii), mientras que el resto del texto se dedica esencialmente a contestar la pregunta iii).

Ejemplo 1.10. Anteriormente vimos que para cualquier $c \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{c}{x} + 1,$$

es solución de

$$y'(x) = \frac{1 - y(x)}{x}.$$

Si ponemos la condición inicial de que $y(1) = 2$, entonces de

$$\frac{c}{1} + 1 = 2,$$

tenemos que $c = 1$. Así que $g(x) = 1/x + 1$ es solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1 - y(x)}{x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.11. El PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^{1/2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tiene dos soluciones:

$$f_1(x) = \frac{x^4}{16}, \quad f_2(x) = 0.$$

□

Podemos ver que en general un PVI puede tener varias soluciones. El siguiente resultado nos da condiciones suficientes para que el PVI (1.6) tenga solución y que ésta sea única. Decimos que el resultado del teorema es “local” ya que el intervalo de existencia de la solución en el enunciado del teorema, en general no es maximal. En la Figura 1.4 se ilustran algunos de los conceptos y resultados del siguiente teorema.

Teorema 1.12 (Existencia y unicidad local). *Sea R una región del plano donde $H(x, y)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$ son continuas. Sea $(x_0, y_0) \in R$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función $f(x)$ definida sobre $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ la cuál es solución de (1.4) sobre J y satisface (1.5), i.e., f es solución del PVI (1.6). Además la función f es la única solución del PVI (1.6) en el intervalo J .*

Ejemplo 1.13. La ecuación diferencial

$$y'(x) = \frac{1 - y(x)}{x},$$

tiene

$$H(x, y) = \frac{1 - y}{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x}.$$

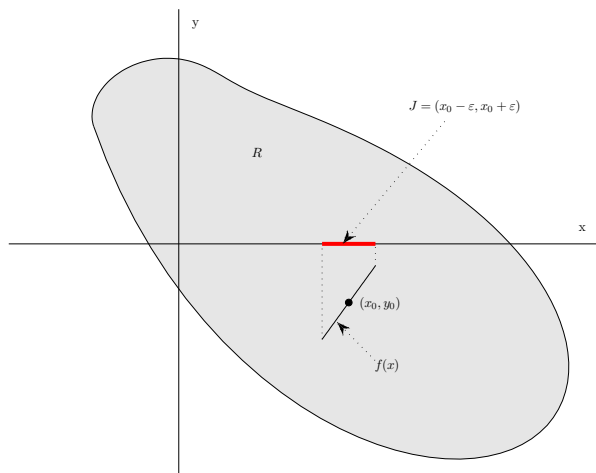


Figura 1.4: Ilustración del intervalo de solución en el Teorema 1.12.

Las condiciones del Teorema 1.12 se cumplen para

$$R = \{(x, y) : x > 0, \quad y \in \mathbb{R}\},$$

o para

$$R = \{(x, y) : x < 0, \quad y \in \mathbb{R}\},$$

Así que el PVI asociado a esta ecuación diferencial, tiene solución la cuál es única para cualquier (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$. En el caso particular en que $(x_0, y_0) = (1, 2)$, por el cálculo del Ejemplo 1.10, tenemos que $f(x) = 1/x + 1$ es la solución del PVI. Note que el intervalo máximo de existencia de la solución en este caso es $(0, \infty)$. \square

Ejemplo 1.14. Para la ecuación diferencial:

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2 + y^2(x)},$$

tenemos que

$$H(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Las condiciones del Teorema 1.12 se cumplen para

$$R = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Así que para cualquier $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, el PVI correspondiente tiene solución que es única. Note que en éste caso no sabemos cuál es la solución ni el intervalo máximo donde ésta sería solución. \square

Ejemplo 1.15. Para la ecuación diferencial:

$$y'(x) = 1 + y^2(x),$$

tenemos que

$$H(x, y) = 1 + y^2, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Las condiciones del Teorema 1.12 se cumplen para $R = \mathbb{R}^2$. Así que el PVI correspondiente tiene solución que es única para cualquier (x_0, y_0) . Note que $f(x) = \tan(x + c)$ es solución de la ecuación diferencial para cualquier $c \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sec^2(x + c) = 1 + \tan^2(x + c) = 1 + f^2(x).$$

Para $(x_0, y_0) = (0, 0)$, la condición $f(0) = 0$ implica que $\tan(c) = 0$, i.e., $c = n\pi$ para cualquier entero n . ¡Parecería que tenemos un número infinito de soluciones! Pero como $\tan(x + n\pi) = \tan(x)$, entonces $f(x) = \tan(x)$ es la única solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^2(x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

Note que el intervalo máximo de solución para f es $(-\pi/2, \pi/2)$. \square

1.4 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, determine el orden y si es lineal o no lineal:

a) $y' + t^2y = e^t$.

b) $2y'' + 3y' - y = te^{-t}$.

c) $y' = y(y + 1)(y - 1)$.

d) $y^{(3)} - 2y' + ty - y^2 = 0$.

Ejercicio 1.2. Verifique que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales dadas, en el intervalo indicado.

a) $f_1(x) = \sin(2x)$ y $f_2(x) = \cos(2x)$ para $y''(x) + 4y(x) = 0$ en \mathbb{R} .

b) $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t) = \cosh(t)$ para $y''(t) - y(t) = 0$ en \mathbb{R} .

c) $f_1(t) = t/3$ y $f_2(t) = e^{-t} + t/3$ para $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t$ en \mathbb{R} .

d) $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_2(x) = 1/x$ para $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ en $(0, \infty)$.

Ejercicio 1.3. Determine si $f(x) = x^2 - 1$ es solución o no de la ecuación diferencial $(y')^4 + y^2 = -1$.

Ejercicio 1.4. Considere la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-2x}{e^y}.$$

a) Identifique la región R del plano donde las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen.

b) Verifique que $f(x) = \ln(1 - x^2)$ es solución de la ecuación diferencial y que satisface la condición inicial $y(0) = 0$.

c) ¿En que intervalo (el máximo) la solución $f(x) = \ln(1 - x^2)$ es válida?

Nota: Recuerde que $u = \ln(1 - x^2)$ es equivalente a $e^u = 1 - x^2$.

Ejercicio 1.5. Considere la ecuación diferencial:

$$y'(x) = \frac{x^2}{x-1} \ln(y).$$

a) Identifique la o las regiones R del plano donde las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen.

b) ¿Para cuales condiciones iniciales (x_0, y_0) , el PVI asociado tendrá solución única?

Ejercicio 1.6. Considere la ecuación diferencial $y'(x) = H(x, y(x))$ donde

$$H(x, y) = \begin{cases} y & , \quad x \geq 0, \quad y \in (-\infty, \infty), \\ 0 & , \quad x < 0, \quad y \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

a) ¿Será

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0, \\ e^x & , \quad x \geq 0, \end{cases}$$

solución de la ecuación diferencial? ¿En que intervalo? Explique sus contestaciones.

b) Determine si f es continua en todo \mathbb{R} .

c) ¿Puede usted utilizar el Teorema 1.12 en este caso, para garantizar que existe una solución única del PVI correspondiente con la condición inicial $y(0) = 1$? Explique su contestación.

Capítulo 2

Ecuaciones de primer orden

En la primera parte de este capítulo vamos a examinar varios métodos para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones de

$$y'(x) = H(x, y(x)), \quad (2.1)$$

esto es, sin necesariamente resolver la ecuación diferencial. Luego vamos a estudiar varios métodos para calcular soluciones exactas de dicha ecuación diferencial. El caso más simple de la ecuación (2.1) es cuando la función H no depende de y . En este caso (2.1) reduce a:

$$y'(x) = H(x), \quad (2.2)$$

cuya solución exacta¹ es:

$$f(x) = \int H(x) dx + c, \quad (2.3)$$

para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$. Note la constante arbitraria en la solución f que corresponde a la integración que se hizo. Decimos que (2.3) representa una *familia* de soluciones de (2.2). En general, cualquier método para resolver la ecuación diferencial (2.1) requiere de una integración, por lo que la solución siempre envuelve una constante arbitraria. A cualquier familia de soluciones de (2.1) que envuelve una constante arbitraria, se le llama una *curva integral* o *solución general*.

¹Note que aunque exacta, la cuestión de si podemos obtener f en forma explícita o no depende de si podemos o no calcular la antiderivada de $H(x)$. Si esta función no tiene una antiderivada explícita, entonces la única alternativa posible para obtener o calcular la f es por medio de métodos numéricos.

Ejemplo 2.1. Anteriormente vimos que para cualquier $c \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{c}{x} + 1,$$

es solución de

$$y'(x) = \frac{1 - y(x)}{x}.$$

Así que f es una curva integral o lo mismo, la solución general de esta ecuación. \square

Ejemplo 2.2. Note que $f(x) = ce^{-x}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$y'(x) + y(x) = 0,$$

para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$. De modo que f es una curva integral o solución general de dicha ecuación diferencial. \square

2.1 Métodos cualitativos

En el Prefacio y Capítulo 1 mencionamos que un método para estudiar una ecuación diferencial es desde el punto de vista cualitativo. Esto es tratamos de obtener la mayor cantidad de información posible de las soluciones de la ecuación diferencial sin tener que resolver la misma. Una de éstas técnicas es la de *campo de direcciones*, que aunque en principio se puede utilizar para ecuaciones de cualquier orden o sistemas, es más fácil de visualizar para el caso de ecuaciones de orden uno. Otra técnica que veremos es la del uso de diagramas de fase para las llamadas *ecuaciones autónomas*.

2.1.1 Campos de direcciones

Si examinamos detenidamente la ecuación diferencial (2.1) vemos que para cualquier $(x_0, y_0) \in R$, donde R es el dominio de H , el valor de $H(x_0, y_0)$ especifica la pendiente de la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (x_0, y_0) . Podemos pensar que a cada punto (x_0, y_0) en R , le podemos asociar un segmento cuya inclinación o pendiente es $H(x_0, y_0)$. La totalidad de estos segmentos es lo que llamamos el *campo de direcciones*. Note que si f es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo J , entonces la gráfica de f es tangente al campo de direcciones en todo punto $(x, f(x))$ con

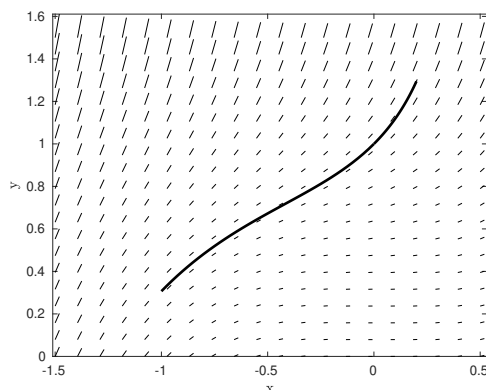


Figura 2.1: Campo de direcciones y una solución de la ecuación diferencial (curva gruesa). Note como la curva solución “sigue el flujo” inducido por el campo de direcciones.

$x \in J$. Esto se puede visualizar como si el campo de direcciones representará el flujo de agua en un río, mientras que la gráfica de una curva solución es el camino o ruta que seguiría una hoja al colocarse en el río en un punto o posición dada. En la Figura 2.1 ilustramos estos conceptos.

La forma más eficiente de dibujar campos de direcciones es mediante el uso de computadoras. No obstante, en ocasiones tenemos que trazar campos de direcciones a mano, ya sea para tener una idea de como éstos se ven o porque no tenemos disponible un computador. En tal caso, un concepto bien útil es el de las *isoclinas*. La isocлина de nivel $c \in \mathbb{R}$ para la ecuación diferencial (2.1) está dada por el conjunto:

$$I_c = \{(x, y) : H(x, y) = c\}.$$

En muchas ocasiones I_c representa una curva plana que podemos dibujar, de modo que podemos trazar el campo de direcciones dibujando varias isoclinas para valores distintos de c . En todos los puntos de la isocлина I_c , los segmentos del campo de direcciones tienen la misma inclinación, dada por el valor de c .

Ejemplo 2.3. Vamos a trazar el campo de direcciones de la ecuación diferencial:

$$y'(x) = xy(x). \quad (2.4)$$

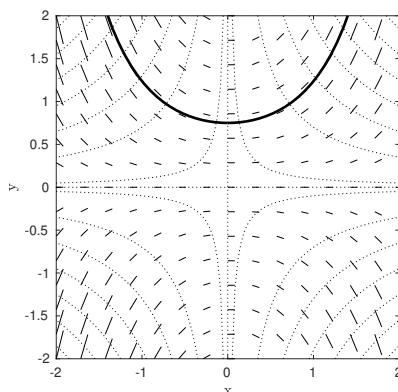


Figura 2.2: Campo de direcciones y una solución de la ecuación diferencial (2.4). Las isoclinas $xy = c$ están dadas por las curvas entre-cortadas.

En este caso $H(x, y) = xy$ por lo que la isoclina I_c está dada por la ecuación:

$$xy = c.$$

Note que si $c = 0$ entonces $x = 0$ ó $y = 0$. En el caso $c \neq 0$, entonces x y y ambas tienen que ser distintas de cero, por lo que:

$$y = \frac{c}{x}.$$

Así que las isoclinas de ésta ecuación diferencial consisten de hipérbolas dadas por la ecuación anterior, y las líneas $x = 0$ y $y = 0$. Recordando que en una isoclina dada, los segmentos del campo de direcciones tienen todos la misma inclinación, podemos entonces recoger la información anterior y trazar el campo de direcciones. En la Figura 2.2 mostramos el campo de direcciones resultante y varias de las isoclinas. Las isoclinas $xy = c$ están dadas por las curvas entre-cortadas. Note que las isoclinas con $c > 0$ se encuentran en el primer y tercer cuadrante, las que corresponden a $c < 0$ aparecen en el segundo y cuarto cuadrante, y los ejes de coordenadas corresponden a las isoclinas con $c = 0$. \square

Ejemplo 2.4. Estudiamos ahora el campo de direcciones de la ecuación diferencial:

$$y'(x) = y(x)(y(x) - 2). \quad (2.5)$$

Tenemos que $H(x, y) = y(y-2)$ por lo que H es independiente de x . Este tipo de ecuación diferencial, esto es cuando H es independiente de x , se llama una *ecuación autónoma* y más adelante las estudiaremos en más detalles. Por el momento, note que la isoclina I_c está dada por las soluciones de la ecuación:

$$y(y - 2) = c.$$

Esta ecuación nos dice que las isoclinas son rectas horizontales a la altura dada por las soluciones de dicha ecuación. Si examinamos la gráfica de $H(y) = y(y - 2)$ vemos que $y(y - 2) = c$ tiene solución:

$$\begin{aligned} y \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) & \text{ para } c > 0, \\ y \in (0, 2) & \text{ para } c \in [-1, 0), \\ y = 0, 2 & \text{ para } c = 0. \end{aligned}$$

En la Figura 2.3 mostramos un trazado del campo de direcciones resultante. Las curvas gruesas representan tres soluciones de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales $y(0) = 2.2, 1.5$ y $y(0) = -1$. Observe que las isoclinas corresponden a rectas horizontales donde los segmentos del campo de direcciones tienen todos la misma inclinación. Note que la ecuación diferencial tiene como soluciones $f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = 2$ las cuales coinciden con las isoclinas correspondientes a $c = 0$. Podemos ver del dibujo que las soluciones de la ecuación diferencial con condición inicial $y(x_0) = y_0$, tienden según $x \rightarrow \infty$ a f_1 si $y_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. No obstante, ninguna solución² se acerca a f_2 (según $x \rightarrow \infty$) independiente de la condición inicial. \square

2.1.2 Ecuaciones autónomas

En el Ejemplo 2.4 vimos un caso particular de una ecuación diferencial autónoma. En general, la ecuación diferencial (2.1) se dice que es autónoma si H es independiente de x , esto es, si la ecuación tiene la forma:

$$y'(x) = H(y(x)). \tag{2.6}$$

Note que si $f(x)$ es una solución de (2.6), entonces $g(x) = f(x - x_0)$ es también solución de la ecuación diferencial para cualquier x_0 . Esta propiedad, que es consecuencia de que H es independiente de x , implica que sin pérdida de generalidad, en el PVI asociado a (2.6) siempre podemos tomar la condición inicial (1.5) con $x_0 = 0$.

²Excepto cuando la condición inicial tiene $y_0 = 2$, en cual caso la solución es f_2 .

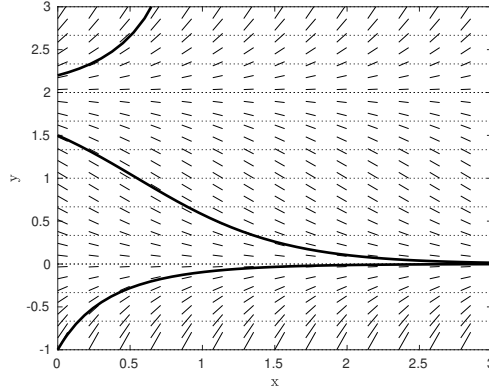


Figura 2.3: Campo de direcciones de la ecuación diferencial (2.5). Las isoclinas son rectas horizontales. Se muestran varias soluciones (curvas gruesas) de la ecuación diferencial.

Las ecuaciones autónomas se pueden estudiar de forma cualitativa utilizando los conceptos de punto crítico y su estabilidad. Decimos que y^* es un *punto crítico* de la ecuación diferencial (2.6) si

$$H(y^*) = 0.$$

Note que en este caso, la función

$$f(x) = y^*, \quad \forall x,$$

es una solución de la ecuación diferencial (2.6). La función $f(x) = y^*$ para toda x se llama una *solución de equilibrio*³ de (2.6).

El punto crítico y^* de (2.6) es *asintóticamente estable* si existe un número $\delta > 0$ tal que para cualquier solución $f(x)$ de (2.6) con $|f(0) - y^*| < \delta$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y^*.$$

De lo contrario, el punto crítico y^* se llama *inestable*.

Examinando la función $H(y)$ podemos obtener unos criterios simples de estabilidad o inestabilidad que no requieren el uso de ésta definición. En la

³Del termino en inglés “*steady state*”.

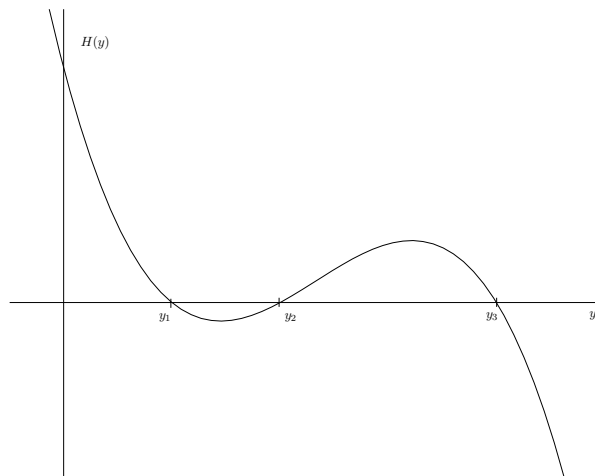


Figura 2.4: Ilustración particular de la función $H(y)$ en la ecuación (2.6) donde los puntos críticos y_1, y_3 que son asintóticamente estables, y y_2 que es inestable.

Figura 2.4 mostramos un caso particular de la función $H(y)$. Note que para el punto crítico y_1 en la figura:

$$\begin{aligned} H(y) &> 0, & \text{si } y < y_1, \\ H(y) &< 0, & \text{si } y_1 < y < y_2. \end{aligned}$$

Como $H(y)$ representa la pendiente o derivada de cualquier solución de (2.6), tenemos que si $f(x)$ es una solución con $f(0) \in (-\infty, y_1)$, entonces $f(x)$ es creciente y tiende a y_1 según $x \rightarrow \infty$. En adición, si $f(0) \in (y_1, y_2)$, entonces $f(x)$ es decreciente y tiende igualmente a y_1 según $x \rightarrow \infty$. Así que el punto crítico y_1 es asintóticamente estable. De igual forma y_3 es asintóticamente estable. Por el contrario, un análisis similar de y_2 muestra que no importa cuan cerca se tome $f(0)$ de y_2 , la solución correspondiente se aleja de y_2 , por lo que y_2 es inestable. Esta información la podemos resumir con el *diagrama de fase* que se muestra en la Figura 2.5.

Los datos importante en el análisis anterior con relación a la función $H(y)$ de la Figura 2.4 son que:

$$H'(y_1) < 0, \quad H'(y_3) < 0, \quad H'(y_2) > 0.$$

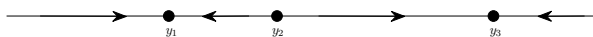


Figura 2.5: Diagrama de fase de la ecuación diferencial (2.6) para la función $H(y)$ de la Figura 2.4.

No es difícil ahora verificar el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Suponga que y^* es un punto crítico de la ecuación diferencial (2.6). Tenemos que:*

- i) Si $H'(y^*) < 0$, entonces y^* es asintóticamente estable.*
- ii) Si $H'(y^*) > 0$, entonces y^* es inestable.*
- iii) Si $H'(y^*) = 0$ el criterio no aplica.*

Ejemplo 2.6. La ecuación diferencial:

$$y'(x) = 3y(x) - y^2(x) + 4,$$

es autónoma con $H(y) = 3y - y^2 + 4$. Los puntos críticos corresponden a las soluciones de $3y - y^2 + 4 = 0$, que son $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. Usando que $H'(y) = 3 - 2y$ tenemos que:

$$H'(y_1) = 5 > 0, \quad H'(y_2) = -5 < 0,$$

por lo que y_1 es inestable y y_2 es asintóticamente estable. En la Figura 2.6 mostramos el campo de direcciones (con varias curvas solución incluyendo las soluciones de equilibrio) y el diagrama de fase para esta ecuación diferencial. \square

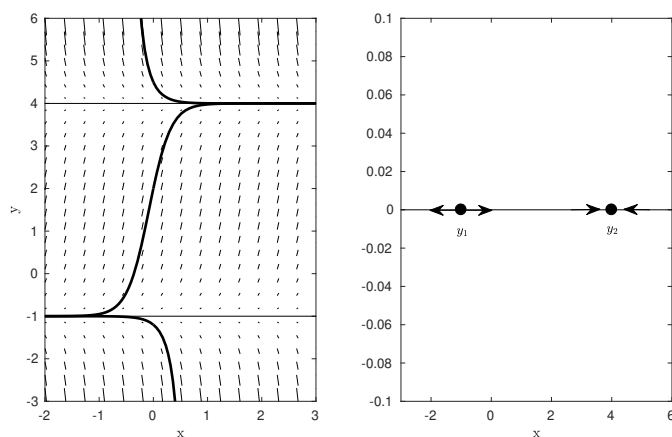


Figura 2.6: Campo de direcciones y diagrama de fase para la ecuación diferencial autónoma del Ejemplo 2.6.

Ejemplo 2.7. Considere la situación de un cuerpo de masa m que cae sobre la superficie de la tierra. Suponemos que la aceleración debido a la gravedad es constante, la cual representamos por g , y que la dirección “hacia arriba” es positiva. Entonces si $v(t)$ representa la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t , tenemos que en caída libre $v(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg,$$

es decir que

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g.$$

Esta ecuación, que es un caso especial de (2.2), se puede resolver integrando una vez con respecto a t , obteniendo así que

$$v(t) = -gt + v_0,$$

donde $v(0) = v_0$ es la condición inicial. Las soluciones en este caso son rectas con intercepto en el eje vertical de v_0 y pendiente $-g$.

En el caso en que tenemos una fuerza de fricción proporcional (pero en dirección opuesta) a la velocidad, la ecuación diferencial para $v(t)$ es:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - kv(t),$$

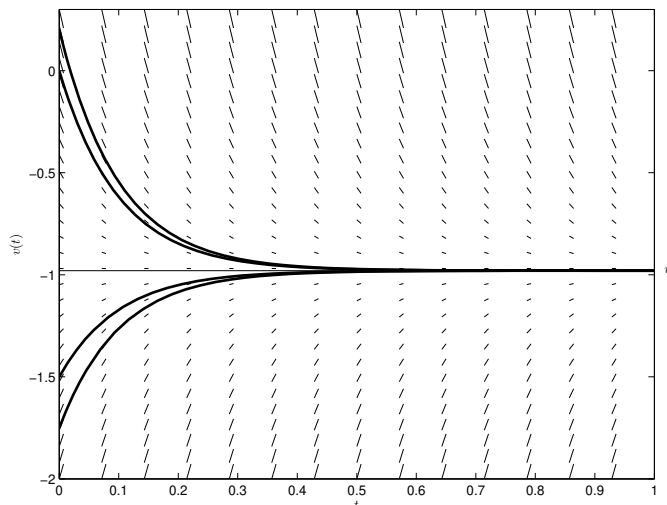


Figura 2.7: Campo de direcciones con varias soluciones y velocidad terminal para la ecuación diferencial (2.7).

donde $k > 0$ es la constante de fricción o viscosidad. Simplificando podemos escribir que:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - \left(\frac{k}{m}\right)v(t). \quad (2.7)$$

Esta ecuación es autónoma con $H(v) = -g - (k/m)v$. Tenemos pues el punto crítico $v^* = -mg/k$, el cual es asintóticamente estable ya que $H'(v) = -(k/m) < 0$. v^* se llama la *velocidad terminal*. En la Figura 2.7 mostramos un campo de direcciones típico para ésta ecuación diferencial que muestra varias curvas solución y la velocidad terminal v^* .

Otro modelo común para la fuerza de fricción es cuando ésta es proporcional (pero en dirección opuesta) al cuadrado de la velocidad. En este caso la ecuación diferencial para $v(t)$ es:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - \left(\frac{k}{m}\right)v(t)|v(t)|. \quad (2.8)$$

Con $H(v) = -g - (k/m)v|v|$, el punto crítico ahora es:

$$v^{**} = -\sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Como $H'(v) = 2(k/m)v$ para $v < 0$, el punto crítico v^{**} es asintóticamente estable. El campo de direcciones típico es como el de la Figura 2.7 usando v^{**} en lugar de v^* . \square

2.2 Métodos analíticos o exactos

Pasamos ahora al estudio de métodos para obtener soluciones exactas de la ecuación diferencial (2.1). Estos métodos aprovechan alguna estructura o simetría de la ecuación para así encontrar una representación de las soluciones. Las soluciones que construiremos, en general estarán dadas de forma implícita por una ecuación algebraica entre x y y . Los métodos analíticos aunque son especializados en el sentido que aplican a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, son de gran utilidad ya que estos tipos de ecuaciones aparecen frecuentemente en diferentes tipos de aplicaciones.

2.2.1 Ecuaciones lineales

La ecuación diferencial (2.1) es lineal cuando ésta tiene la forma⁴:

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x). \quad (2.9)$$

Para resolver esta ecuación, buscamos una función $\mu(x)$, llamada un *factor integrante*, de modo que al multiplicar ambos lados de (2.9) por $\mu(x)$, el lado izquierdo se convierta en una diferencial exacta, esto es:

$$\mu(x)(y'(x) + p(x)y(x)) = (\mu(x)y(x))'.$$

Igualando y despejando ambos lados de ésta última ecuación, llegamos a que:

$$\mu(x)p(x)y(x) = \mu'(x)y(x).$$

Si $y(x)$ no es idénticamente cero y suponiendo que $\mu(x) > 0$, entonces tenemos que:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x). \quad (2.10)$$

Recuerde que

$$\frac{d}{dx} [\ln \mu(x)] = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)},$$

⁴Esto corresponde a $H(x, y) = -p(x)y + g(x)$.

por lo que podemos escribir la ecuación (2.10) como:

$$\frac{d}{dx} [\ln \mu(x)] = p(x).$$

Note que esta última ecuación es un caso especial de (2.2). Integrando en ambos lados y tomando como cero la constante de integración resultante, tenemos que

$$\ln \mu(x) = \int p(x) dx,$$

o que:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = \exp \left[\int p(x) dx \right]. \quad (2.11)$$

Volvemos ahora a la ecuación diferencial (2.9), pero multiplicando ambos lados de ésta por $\mu(x)$. Tomando en cuenta que luego de multiplicar por $\mu(x)$, el lado izquierdo de (2.9) es un diferencial exacto, llegamos a que (2.9) es equivalente a:

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)g(x).$$

Integrando ambos lados de esta ecuación y despejando para $y(x)$, tenemos que

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)g(x) dx + c \right], \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12), en conjunto con (2.11), nos da una curva integral o lo mismo, la solución general de (2.9).

Ejemplo 2.8. Vamos a construir la solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) &= x, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Note que en este problema, $p(x) = 1$, y $g(x) = x$. Así que:

$$\mu(x) = \exp \left[\int p(x) dx \right] = \exp \left[\int dx \right] = e^x.$$

Multiplicando ahora ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$, obtenemos que:

$$(e^x y(x))' = x e^x$$

esto es que:

$$y(x) = e^{-x} \left[\int x e^x dx + c \right] = e^{-x} [(x-1)e^x + c] = x - 1 + ce^{-x}.$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial. Aplicando ahora la condición inicial de $y(0)=1$, tenemos que:

$$1 = 0 - 1 + ce^0,$$

esto es, que $c = 2$. Así que

$$f(x) = x - 1 + 2e^{-x},$$

es la solución del PVI. □

Ejemplo 2.9. Consideremos ahora el PVI:

$$\begin{cases} xy'(x) + 2y(x) = x^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Si escribimos la ecuación diferencial como

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = x,$$

entonces $p(x) = 2/x$, y $g(x) = x$. Tenemos ahora que:

$$\mu(x) = \exp \left[\int \frac{2}{x} dx \right] = \exp(\ln x^2) = x^2.$$

La ecuación diferencial es ahora equivalente, siempre que $x \neq 0$, a:

$$(x^2y(x))' = x^3.$$

Integrando con respecto a x en ambos lados y despejando para $y(x)$, obtenemos la solución general:

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2},$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es arbitraria. La condición inicial $y(1) = 2$ implica que $c = 7/4$, por lo que la solución del PVI es:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{7}{4x^2} = \frac{x^4 + 7}{4x^2}.$$

□

Ejemplo 2.10 (Mezclas). Un tanque contiene originalmente 100 galones de agua fresca. A éste se le añade una mezcla de agua y sal con una concentración de $1/4$ de libra por galón y a razón de 2 galones por minuto. La mezcla del tanque sale a la misma razón, y en todo momento se mantiene uniforme (“bien mezclada”). Luego de 10 minutos, el proceso se detiene, y entonces se comienza a añadir agua fresca al tanque a razón de 2 galones por minuto, nuevamente saliendo la mezcla del tanque a la misma razón. Vamos a determinar la cantidad de sal en el tanque luego de 20 minutos.

Si $x(t)$ representa las libras de sal en el tanque en tiempo t , tenemos con la notación del Ejemplo 1.1, que durante los primeros 10 minutos:

$$V_0 = 100 \text{ gal}, \quad r_o = r_i = 2 \text{ gal/min}, \quad c_i = \frac{1}{4} \text{ lb/gal}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1.1) tenemos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{50}x(t) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Tenemos también la condición inicial de que $x(0) = 0$ ya que inicialmente el agua en el tanque es “fresca”. Esta ecuación diferencial es lineal con factor integrante $\mu(t) = \exp[t/50]$. Integrando y usando la condición inicial tenemos que:

$$x(t) = 25 \left(1 - e^{-[t/50]} \right), \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Para el periodo de $10 \leq t \leq 20$, tenemos los mismos valores de V_0, r_o, r_i de arriba, excepto que ahora $c_i = 0$. La ecuación diferencial queda ahora como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{50}x(t), \quad 10 \leq t \leq 20.$$

Esta ecuación es lineal con solución general:

$$x(t) = ce^{-[t/50]}, \quad 10 \leq t \leq 20.$$

Si usamos que de la expresión para $x(t)$ en el periodo $0 \leq t \leq 10$, tenemos que

$$x(10) = 25 \left(1 - e^{-\frac{1}{5}} \right),$$

entonces podemos determinar la constante c , de modo que:

$$x(t) = 25 \left(1 - e^{-\frac{1}{5}} \right) e^{-[t-10/50]}, \quad 10 \leq t \leq 20.$$

Finalmente, a los 20 minutos, la cantidad de sal en el tanque será de:

$$x(20) = 25 \left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right) e^{-\frac{1}{5}} = 3.71 \text{ lbs.}$$

□

Para la ecuación lineal (2.9), el resultado del Teorema 1.12 es más fuerte o explícito en cuanto al intervalo de existencia de la solución. Usando la fórmula (2.12) se puede verificar el siguiente resultado.

Teorema 2.11 (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales). *Suponga que las funciones p y g en (2.9) son continuas en el intervalo $J = (\alpha, \beta)$ y que $x_0 \in J$. Entonces para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$, el PVI:*

$$\begin{cases} y'(x) + p(x)y(x) &= g(x), \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

tiene una solución f que es única y cuyo intervalo máximo de existencia es J .

Ejemplo 2.12. Considere el PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + \left(\frac{3}{x-2}\right)y(x) &= \frac{x}{x-1}, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Note que los dominios de:

$$p(x) = \frac{3}{x-2}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1},$$

son $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ y $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ respectivamente. La intersección de estos dominios es:

$$(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

Así que, sin resolver el PVI, podemos decir que el intervalo máximo de existencia de la solución del PVI es:

$$J = \begin{cases} (-\infty, 1), & \text{si } x_0 \in (-\infty, 1), \\ (1, 2), & \text{si } x_0 \in (1, 2), \\ (2, \infty), & \text{si } x_0 \in (2, \infty). \end{cases}$$

□

2.2.2 Ecuaciones separables

La ecuación diferencial (2.1) es *separable* si:

$$H(x, y) = M(x)N(y).$$

En tal caso y escribiendo

$$y'(x) = \frac{dy}{dx},$$

podemos escribir la ecuación diferencial (2.1) en su *forma diferencial* como:

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x) dx.$$

Integrando ambos lados de esta ecuación, obtenemos de forma simbólica la solución general de (2.1) en este caso:

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x) dx + c.$$

El “éxito” de este método depende de cuan fácil sea evaluar las integrales envueltas en esta ecuación. Note que en general en esta ecuación y está dada como función de x de forma *implícita*.

Ejemplo 2.13. Considere el PVI:

$$y'(x) = \frac{\text{sen } x}{y(x)}, \quad y(0) = 2.$$

La ecuación diferencial es separable y en su forma diferencial lee como:

$$y dy = \text{sen } x dx.$$

Integrando ambos lados tenemos que

$$\frac{1}{2} y^2 = -\cos x + c,$$

es la solución general. Sustituyendo $y(0) = 2$ en esta ecuación tenemos que $c = 3$. Así que la solución del PVI satisface que:

$$\frac{1}{2} y^2 = -\cos x + 3,$$

Note que en este caso podemos despejar para y en términos de x :

$$y = \pm\sqrt{6 - 2\cos x}.$$

Como $y(0) = 2 > 0$, entonces la solución del PVI es:

$$f(x) = \sqrt{6 - 2\cos x}.$$

□

Ejemplo 2.14. La ecuación diferencial:

$$\tan y \, dy - x^3 \, dx = 0,$$

es claramente separable. Pasando los términos de x a la derecha e integrando en ambos lados, tenemos que:

$$-\ln |\cos y| = \frac{x^4}{4} + c,$$

es la solución general de la ecuación dada. Esta expresión se puede escribir también como:

$$|\cos y| = \exp \left[-\frac{x^4}{4} + c \right].$$

Note que la c en ésta última ecuación, no es la misma c que en la ecuación anterior. □

Ejemplo 2.15 (Familias de curvas ortogonales). Dos familias de curvas se llaman *ortogonales* si cada curva de una familia interseca de forma ortogonal a cada curva de la otra familia. Vamos a ilustrar este concepto buscando la familia de curvas o trayectorias ortogonales a la familia de parábolas dada por:

$$y = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En cualquier punto de la gráfica de $y = cx^2$, la pendiente a la curva está dada por $2cx$. Despejando para c en la ecuación $y = cx^2$, tenemos que $c = y/x^2$. La pendiente $2cx$ puede escribirse entonces como

$$2 \left(\frac{y}{x^2} \right) x = \frac{2y}{x}.$$

Como dy/dx representa ésta pendiente, podemos decir entonces que la familia de curvas $y = cx^2$ es la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Cualquier otra curva que sea perpendicular o ortogonal a $y = cx^2$ en un punto (x, y) cualquiera, tiene pendiente en (x, y) dada por:

$$-\frac{x}{2y}.$$

Así que la familia de curvas ortogonales a $y = cx^2$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Esta ecuación diferencial es separable y tiene solución general:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c, \quad c \geq 0,$$

lo cuál es una familia de elipses con centro en el origen y eje mayor en x . En la Figura 2.8 mostramos varios miembros de ambas familias. \square

2.2.3 Ecuaciones exactas

Suponemos en esta discusión que la ecuación diferencial (2.1) está escrita en forma diferencial como:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (2.13)$$

Decimos que (2.13) es *exacta* si existe una función $\psi(x, y)$ tal que:

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y). \quad (2.14)$$

Recuerde que $\psi_x(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$, etc. En tal caso, la ecuación (2.13) se puede escribir como:

$$\psi_x(x, y) dx + \psi_y(x, y) dy = 0.$$

Suponiendo que y es una función de x , ésta ecuación implica que:

$$\frac{d}{dx}[\psi(x, y)] = \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

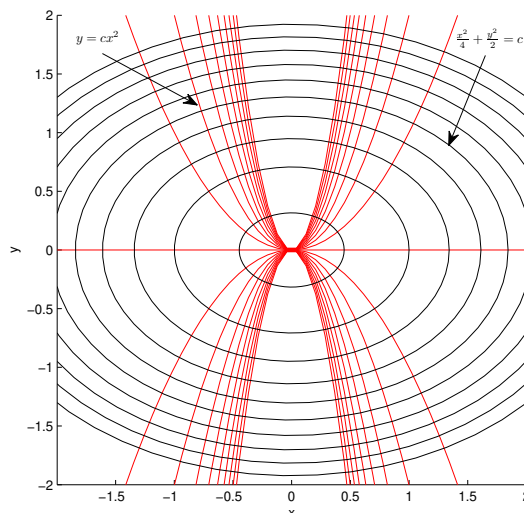


Figura 2.8: Dos familias de curvas ortogonales: parábolas (curvas rojas) y elipses (curvas negras).

esto es que

$$\psi(x, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

es la solución general de la ecuación diferencial (2.13), donde y está dada de forma implícita como función de x . Note que esta misma expresión nos da la solución general de la ecuación en el caso en que x es función de y .

Ejemplo 2.16. Considere la ecuación diferencial:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0.$$

Note que tomando $\psi(x, y) = x^2y$, tenemos que:

$$\psi_x = 2xy, \quad \psi_y = x^2,$$

por lo que la ecuación diferencial es exacta. Así que:

$$x^2y = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

es la solución general de la ecuación. □

En el ejemplo anterior no explicamos de donde salió la función $\psi(x, y)$. Antes de examinar un método para calcular ψ , necesitamos identificar bajo que condiciones es posible conseguir ésta función.

Teorema 2.17. *Suponga que las funciones $M(x, y)$, $N(x, y)$, $M_y(x, y)$, y $N_x(x, y)$ son continuas para toda $(x, y) \in R$, donde $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$. Entonces la ecuación (2.13) es exacta en R si y solo si*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \quad (x, y) \in R. \quad (2.15)$$

Demostración: Si suponemos que (2.13) es exacta, entonces existe $\psi(x, y)$ que satisface (2.14). Es fácil ver ahora que:

$$M_y = \psi_{xy} = \psi_{yx} = N_x,$$

donde hemos usado la continuidad de las derivadas parciales mixtas de orden dos.

Suponemos ahora que (2.15) se cumple. Buscamos una función $\psi(x, y)$ que cumpla las condiciones (2.14). Integrando la primera ecuación en (2.14) con respecto a x , tenemos que:

$$\psi(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y), \quad (2.16)$$

donde la función $h(y)$ actúa como una constante de integración con respecto a x . Esta expresión para ψ cumple con la primera condición en (2.14). Para que la segunda condición en (2.14) se satisfaga también, es necesario que:

$$N(x, y) = \psi_y(x, y) = \int M_y(x, y) dx + h'(y),$$

de donde obtenemos que:

$$h'(y) = N(x, y) - \int M_y(x, y) dx.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \int M_y(x, y) dx \right] = N_x - M_y = 0,$$

por (2.15), entonces la expresión de arriba para $h'(y)$ es de hecho una función de y únicamente. Tenemos entonces, luego de integrar con respecto a y , y tomando la constante de integración como cero, que

$$h(y) = \int \left[N(x, y) - \int M_y(x, y) dx \right] dy.$$

Sustituyendo esta expresión para h en (2.16), obtenemos una función $\psi(x, y)$ que cumple con (2.14). \square

Si la condición (2.15) se cumple, entonces de la demostración del teorema anterior tenemos un procedimiento para encontrar la función $\psi(x, y)$.

Ejemplo 2.18. Para la ecuación diferencial

$$e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0,$$

tenemos que

$$M(x, y) = e^y, \quad N(x, y) = xe^y + 2y.$$

Note que

$$M_y = e^y = N_x,$$

por lo que la ecuación es exacta. Así que existe una función $\psi(x, y)$ tal que:

$$\psi_x = M = e^y, \quad \psi_y = N = xe^y + 2y.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones con respecto a x obtenemos que:

$$\psi(x, y) = xe^y + h(y).$$

Usando ahora ésta expresión de ψ y que $\psi_y = N = xe^y + 2y$, tenemos que

$$xe^y + 2y = \psi_y = xe^y + h'(y),$$

de donde obtenemos que $h'(y) = 2y$, i.e., que $h(y) = y^2$. Tenemos finalmente que $\psi(x, y) = xe^y + y^2$, y que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

\square

Ejemplo 2.19. Para la ecuación diferencial

$$\left(x + \frac{2}{y}\right) dy + y dx = 0,$$

tenemos que

$$M(x, y) = y, \quad N(x, y) = x + \frac{2}{y}.$$

Note que

$$M_y = 1 = N_x,$$

por lo que la ecuación es exacta. Así que existe una función $\psi(x, y)$ tal que:

$$\psi_x = y, \quad \psi_y = x + \frac{2}{y}.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones con respecto a x obtenemos que:

$$\psi(x, y) = xy + h(y).$$

Usando ahora ésta expresión de ψ y que $\psi_y = x + 2/y$, tenemos que

$$x + \frac{2}{y} = \psi_y = x + h'(y),$$

de donde obtenemos que $h'(y) = 2/y$, i.e., que $h(y) = \ln y^2$. Tenemos finalmente que $\psi(x, y) = xy + \ln y^2$, y que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$xy + \ln y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

2.2.4 Factores integrantes

Cuando una ecuación diferencial no es exacta, esto es, si (2.15) no se cumple, es posible en ciertos casos manipular la ecuación hasta convertirla en una que sea exacta. El método para hacer esto es el de factores integrantes y la idea es hallar una función $\mu(x, y)$ (el *factor integrante*) de modo que

$$\mu(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0,$$

sea exacta. Aplicando el criterio (2.15) a esta nueva ecuación obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y)N(x, y)],$$

o en forma expandida que:

$$N\mu_x - M\mu_y + (N_x - M_y)\mu = 0.$$

¡Esta ecuación diferencial parcial para $\mu(x, y)$ es en general mucho más difícil de resolver que la ecuación diferencial original! No obstante en ciertos casos particulares, es posible resolverla. Por ejemplo, si $\mu(x, y) = \mu(x)$, i.e., que no depende de y , entonces la ecuación diferencial parcial de arriba reduce a:

$$\frac{d\mu}{dx} = \left[\frac{M_y - N_x}{N} \right] \mu.$$

Si el coeficiente:

$$\frac{M_y - N_x}{N},$$

es función únicamente de x , y si podemos resolver la ecuación resultante para $\mu(x)$, entonces podemos convertir la ecuación diferencial original a una que sea exacta. De igual se podría trabajar suponiendo que μ es independiente de x , donde obtenemos que:

$$\frac{d\mu}{dy} = \left[\frac{N_x - M_y}{M} \right] \mu,$$

siempre que el coeficiente:

$$\frac{N_x - M_y}{M},$$

sea función de y únicamente.

Ejemplo 2.20. La ecuación diferencial:

$$y dx + (x^2y - x) dy = 0,$$

tiene $M = y$, y $N = x^2y - x$. Note que

$$M_y = 1, \quad N_x = 2xy - 1,$$

por lo que la ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante $\mu(x)$. Como

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = -\frac{2}{x},$$

que es función de x únicamente, entonces es posible encontrar un factor integrante que es función solo de x . De hecho

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{2}{x} \mu,$$

que es una ecuación separable con solución particular $\mu(x) = x^{-2}$. Multiplicando la ecuación diferencial original por $\mu(x)$ obtenemos la nueva ecuación:

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y - \frac{1}{x} \right) dy = 0,$$

la cuál es claramente exacta. Así que buscamos $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x = \frac{y}{x^2}, \quad \psi_y = y - \frac{1}{x}.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones con respecto a x obtenemos que:

$$\psi(x, y) = -\frac{y}{x} + h(y).$$

Usando ahora ésta expresión de ψ y que $\psi_y = y - 1/x$, tenemos que

$$y - \frac{1}{x} = \psi_y = -\frac{1}{x} + h'(y),$$

de donde obtenemos que $h'(y) = y$, i.e., que $h(y) = y^2/2$. Tenemos finalmente que $\psi(x, y) = -y/x + y^2/2$, y que la solución general de la ecuación diferencial original es:

$$-\frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

2.2.5 Ecuaciones homogéneas

La ecuación diferencial (2.1) es *homogénea* si la función $H(x, y)$ cumple que:

$$H(tx, ty) = H(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

En este caso también decimos que la función $H(x, y)$ es homogénea (de grado cero).

Ejemplo 2.21. La función:

$$H(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

es homogénea ya que:

$$H(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{x - y}{x + y} = H(x, y).$$

□

Si H es homogénea, entonces con $t = 1/x$, tenemos que:

$$H(x, y) = H(tx, ty) = H\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Con el cambio de variables $v = y/x$, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}.$$

Combinando ésto con la ecuación anterior, podemos escribir (2.1) como:

$$v + x \frac{dv}{dx} = H(1, v),$$

es decir:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{H(1, v) - v}{x},$$

la cuál es una ecuación diferencial separable. Si pudiéramos resolver esta nueva ecuación, entonces obtendríamos la solución de la ecuación original reemplazando v con y/x .

Ejemplo 2.22. La ecuación diferencial:

$$(x + y) dx - (x - y) dy = 0,$$

la podemos reescribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Es fácil ver que $H(x, y) = (x + y)/(x - y)$ es homogénea. La sustitución $v = y/x$ nos lleva a que:

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v} - v = \frac{1 + v^2}{1 - v}.$$

Separando variables tenemos que:

$$\frac{1 - v}{1 + v^2} dv = \frac{dx}{x}.$$

Como

$$\int \frac{1 - v}{1 + v^2} dv = \int \frac{dv}{1 + v^2} - \int \frac{v}{1 + v^2} dv = \tan^{-1} v - \frac{1}{2} \ln(1 + v^2),$$

tenemos que la solución general para la ecuación diferencial en v es:

$$\tan^{-1} v - \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = \ln |x| + c.$$

Reemplazando v con y/x , tenemos que la solución general de la ecuación diferencial original es:

$$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \ln |x| + c.$$

□

2.2.6 Ecuación de Bernoulli

La ecuación (2.1) es de *Bernoulli* si ésta tiene la forma⁵:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^n(x), \quad n \neq 0, 1.$$

Note que los casos $n = 0, 1$ reducen a ecuaciones lineales. Si dividimos ambos lados de la ecuación por $y^n(x)$, tenemos que:

$$y^{-n}(x)y'(x) + p(x)y^{1-n}(x) = q(x).$$

Tomando $v(x) = y^{1-n}(x)$, vemos que:

$$v'(x) = (1 - n)y^{-n}(x)y'(x).$$

Usando esto en la ecuación diferencial anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{1 - n} v'(x) + p(x)v(x) = q(x),$$

que es una ecuación diferencial lineal para $v(x)$.

Ejemplo 2.23. La ecuación:

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = xy^2(x),$$

⁵Recuerde que $y^n(x) = [y(x)]^n$, mientras que $y^{(n)}(x)$ es la n -ésima derivada de $y(x)$.

es de Bernoulli con $n = 2$. La sustitución $v(x) = y^{-1}(x)$ convierte la ecuación a:

$$v'(x) - \frac{1}{x}v(x) = -x.$$

Con el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp \left[- \int \frac{1}{x} dx \right] = \frac{1}{x},$$

la ecuación diferencial anterior es equivalente a:

$$(x^{-1}v(x))' = -1.$$

Integrando esta última ecuación, tenemos que:

$$v(x) = x(c - x).$$

Como $v = y^{-1}$, tenemos que la solución general de la ecuación diferencial original es:

$$y(x) = \frac{1}{x(c - x)}.$$

□

2.3 Algunas aplicaciones

En esta sección vamos a discutir varios ejemplos de aplicaciones donde para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes, se utilizan los conceptos discutidos en este capítulo.

2.3.1 Modelos de poblaciones

La descripción del crecimiento o cambio de una población debido a diferentes factores externos o biológicos, es un problema de gran importancia social. En esta sección vamos a describir algunos de los modelos clásicos que aunque relativamente simples, permiten hacer predicciones buenas a corto plazo y en ocasiones a largo plazo también. Por el momento consideraremos únicamente modelos para una sola población. Más adelante examinaremos modelos con dos poblaciones.

El primer modelo poblacional es el de *crecimiento exponencial* (Malthus (1798)). Si $P(t)$ representa la población (total de individuos) en tiempo t , entonces éste modelo propone que la razón de cambio de $P(t)$ es proporcional a $P(t)$. Esto lo podemos expresar en una ecuación diferencial como:

$$\frac{dP}{dt}(t) = rP(t),$$

donde la constante de proporcionalidad r , es positiva y se llama la *constante o tasa de crecimiento*⁶. Si $P(0) = P_0$, entonces la solución de ésta ecuación está dada por:

$$P(t) = P_0 e^{rt}, \quad t \geq 0.$$

Como $r > 0$, entonces $P(t) \rightarrow \infty$ (exponencialmente) según $t \rightarrow \infty$, a menos que $P_0 = 0$. Se ha comprobado que éste modelo es bueno para predicciones a corto plazo y en situaciones donde la población no tiene limitaciones de espacio y alimento. Note que el modelo no incluye retiro de individuos de la población como por ejemplo, por muerte.

El próximo modelo que discutimos es el *modelo logístico* (Verhulst (1838)) el cuál pretende corregir algunas de las limitaciones básicas en el modelo exponencial, en particular la referente al crecimiento indefinido. La idea es que en lugar de tener una tasa de crecimiento r constante, el modelo logístico usa una tasa variable que es esencialmente constante cuando la población $P(t)$ es pequeña, y es negativa cuando la población es grande. En particular, se usa una tasa lineal (y decreciente) en P . La ecuación diferencial del modelo está dada por:

$$\frac{dP}{dt}(t) = (r - aP(t))P(t), \quad (2.18)$$

donde $r, a > 0$. Aunque ésta ecuación diferencial se puede resolver de forma exacta ya que es separable, la vamos a analizar desde el punto de vista cualitativo ya que es autónoma. Con $H(P) = (r - aP)P$, tenemos que los puntos críticos de la ecuación diferencial son $P = 0$ y $P = r/a$. Como $H'(P) = r - 2aP$, entonces $H'(0) = r > 0$ y $H'(r/a) = -r < 0$ por lo que 0 es inestable y r/a es asintóticamente estable. En la Figura 2.9 mostramos un diagrama típico del campo de direcciones y varias soluciones de ésta ecuación diferencial. El punto crítico

$$K = \frac{r}{a},$$

⁶Si $r < 0$, éste modelo se utiliza para describir el decaimiento o desintegración de sustancias radioactivas

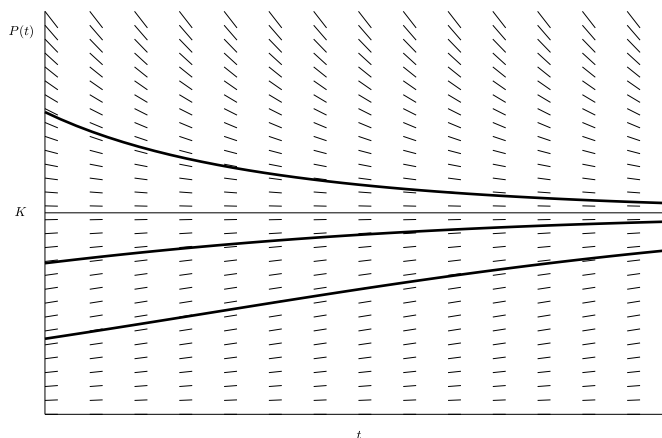


Figura 2.9: Diagrama del campo de direcciones con varias soluciones para la ecuación logística (2.18).

se llama el *punto o población de saturación*. Del campo de direcciones podemos concluir que:

1. Si $P(0) \in (0, K)$, entonces $P(t) \rightarrow K$ según $t \rightarrow \infty$ con $P(t)$ creciente.
2. Si $P(0) > K$, entonces $P(t) \rightarrow K$ según $t \rightarrow \infty$ con $P(t)$ decreciente.

Note que $P(t) = K$ para toda t si $P(0) = K$, y que $P(t) = 0$ para toda t si $P(0) = 0$.

Concluimos ésta sección con el *modelo logístico con umbral*. Este modelo utiliza la ecuación:

$$\frac{dP}{dt}(t) = -r \left(1 - \frac{P(t)}{T}\right) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) P(t), \quad (2.19)$$

donde $r > 0$ y $0 < T < K$. La tasa de crecimiento en este modelo, al igual que en el logístico, es variable pero negativa para P pequeño, positiva para P de tamaño no muy grande, y de nuevo negativa para P grande. Los puntos críticos de ésta ecuación son $P = 0, T, K$. Evaluando la derivada de

$$H(P) = -r(1 - P/T)(1 - P/K)P,$$

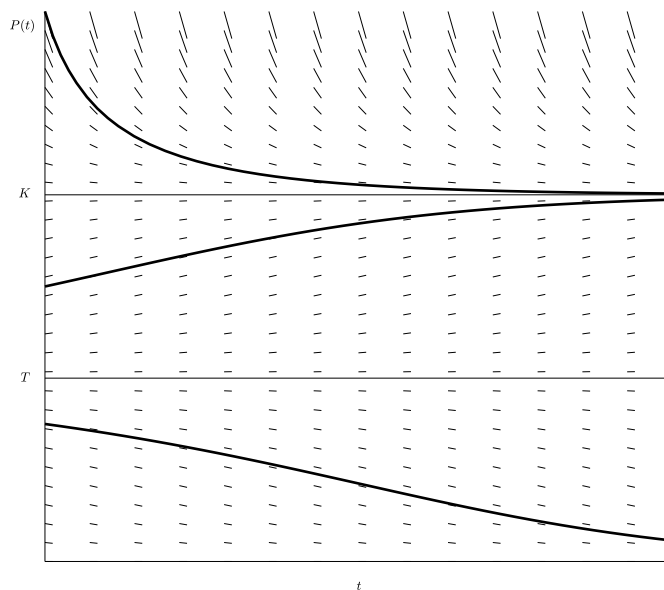


Figura 2.10: Diagrama del campo de direcciones con varias soluciones para la ecuación (2.19).

en los puntos críticos, obtenemos que $0, K$ son asintóticamente estables, mientras que T es inestable. En la Figura 2.10 mostramos un diagrama típico del campo de direcciones y varias soluciones de ésta ecuación diferencial. Podemos concluir en este caso que:

1. Si $P(0) \in (0, T)$, entonces $P(t) \rightarrow 0$ según $t \rightarrow \infty$ con $P(t)$ decreciente.
2. Si $P(0) \in (T, K)$, entonces $P(t) \rightarrow K$ según $t \rightarrow \infty$ con $P(t)$ creciente.
3. Si $P(0) > K$, entonces $P(t) \rightarrow K$ según $t \rightarrow \infty$ con $P(t)$ decreciente.

El valor de T se llama la *población umbral* ya que si la población inicial es menor que T , entonces la población “desaparece” o se extingue con el tiempo.

2.3.2 Circuitos eléctricos

En el Ejemplo 1.5 derivamos la ecuación diferencial:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + R \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t),$$

para la carga total $Q(t)$ en tiempo t en un circuito RLC (resistencia–inductancia–capacitor). Al momento no podemos analizar ésta ecuación pues es de segundo orden, pero podemos estudiar los casos especiales de dicho circuito cuando no hay inductancia o cuando no hay capacitor. El mismo análisis que hicimos en el Ejemplo 1.5 muestra que en un circuito con una resistencia y un capacitor en serie, la carga total $Q(t)$ cumple con la ecuación diferencial:

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V(t). \quad (2.20)$$

Por otro lado, en un circuito con una inductancia y una resistencia, la corriente $I(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t). \quad (2.21)$$

Ejemplo 2.24. En un circuito en serie con una resistencia de 1000 ohms, capacitancia de 5×10^{-6} faradios, y voltaje aplicado de 200 voltios, la corriente inicial es de 0.4 amperios. Buscamos la carga en el circuito luego de 0.005 segundos. Como

$$R = 1000, \quad C = 5 \times 10^{-6}, \quad V = 200,$$

la ecuación diferencial (2.20) reduce a:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + 200Q(t) = 0.2.$$

Esta ecuación es lineal con factor integrante $\mu(t) = e^{200t}$, por lo que su solución general es:

$$Q(t) = 0.001 + ce^{-200t}. \quad (2.22)$$

Para determinar c usamos que la corriente inicial $I(0) = 0.4$. Como $I(t) = dQ(t)/dt$, la ecuación diferencial para $Q(t)$ se puede escribir como:

$$I(t) + 200Q(t) = 0.2.$$

Sustituyendo $t = 0$ y usando el valor de $I(0)$, tenemos que:

$$Q(0) = -0.001.$$

Evaluando (2.22) en $t = 0$ e igualando a -0.001 tenemos que $c = -0.002$.
Tenemos entonces que

$$Q(t) = 0.001 - 0.002e^{-200t}.$$

Finalmente tenemos que

$$Q(0.005) = 0.001 - 0.002e^{-1} = 2.64 \times 10^{-4} \text{ coulombs.}$$

□

2.4 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Para las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas, halle todos los puntos de equilibrio de la ecuación, clasifique los puntos de equilibrio como estables o inestables, y haga un dibujo del diagrama de fase.

a) $x'(t) = x(t) - x^2(t)$.

b) $x'(t) = x^3(t) - 4x(t)$.

Ejercicio 2.2. Considere la ecuación diferencial autónoma

$$y' = (y^2 - 5y + 6)(y + 1).$$

a) Halle todos los puntos de equilibrio de la ecuación.

b) Clasifique los puntos de equilibrio como estables o inestables.

c) Haga un dibujo del diagrama de fase (de una dimensión).

d) Haga un trazado del campo direcciones.

e) Si $y(0) = 1$, ¿qué valor tiene el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?

Ejercicio 2.3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2.$$

- a) Halle la ecuación para la isoclina correspondiente a la inclinación c del campo de direcciones.
- b) Trace las isoclinas con el valor de c correspondiente para los valores de $c = 0, \pm 1, \pm 2$.
- c) Trace las soluciones de la ecuación diferencial correspondientes a las condiciones iniciales $y(2) = 4$ y $y(-1) = -1$.

Ejercicio 2.4. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y.$$

- a) Halle la ecuación para la isoclina correspondiente a la inclinación c del campo de direcciones. Identifique a que tipo de curva en el plano corresponde la isoclina.
- b) Trace las isoclinas con el valor de c correspondiente a los valores de $c = 0, \pm 1, \pm 2$.
- c) Trace las soluciones de la ecuación diferencial, sobre el trazado de la parte (b), correspondientes a las condiciones iniciales $y(-1) = 2$ y $y(2) = 3$.

Ejercicio 2.5. ¿Cuál es el intervalo máximo de existencia para la solución de los siguientes problemas de valor inicial?

- a) $y' + (\ln x)y = (\tan x)$, $y(\pi/4) = -\sqrt{2}$.
- b) $y' + (\sqrt{x})y = \frac{1}{1-x^2}$, $y(0.5) = -4$.
- c) $\sin(x)y'(x) + e^x y(x) = x^3$, $y(1) = 0$.

Ejercicio 2.6. Halle la solución del PVI:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2x + 3}{y^3}, \quad y(2) = 1.$$

Ejercicio 2.7. Clasifique las siguientes ecuaciones como lineal, separable, exacta, o homogénea. No resuelva ninguna de las ecuaciones.

- a) $(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$.

b) $(xy^2 + x^3)dx + (x^2y + y^2)dy = 0.$

c) $dy + (2y - 4x)dx = 0.$

d) $(2xe^y + x^3)dx + (x^2e^y + y^2)dy = 0.$

e) $dy + (5x - 3y)dx = 0.$

f) $(x^3 - y^3)dx - 3xy^2dy = 0.$

Ejercicio 2.8. Halle la solución general de:

a) $y'(x) - 2y(x) = 5.$

b) $\frac{dx}{x+1} + \cos(y)dy = 0.$

c) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$

d) $(x^3 - 2y)dx - xdy = 0.$

e) $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}.$

f) $\sin(x)dx + \cos(y)dy = 0.$

g) $y'(x) + 3y(x) = 1.$

h) $(2y - x^2)dx + (2x + y^3)dy = 0.$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)},$ a, b, c, d constantes positivas.

Ejercicio 2.9. Halle la solución del problema de valor inicial

$$x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$$

Ejercicio 2.10. Halle la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} ty'(t) - y(t) = t^2 \cos(t), \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Ejercicio 2.11. Verifique que la función $\mu(x, y)$ dada en cada uno de los siguientes problemas, es un factor integrante de la ecuación diferencial dada (la hace exacta). Usando ésto, halle la solución general de la ecuación.

a) $(6y - 4y^2)dx + (9x - 8xy)dy = 0, \quad \mu(x, y) = xy^2.$

b) $x dy + y dx + 3x^3y^4 dy = 0, \quad \mu(x, y) = x^{-3}y^{-3}.$

Ejercicio 2.12. En un reactor nuclear, el proceso de fisión produce neutrones a una razón que es proporcional al número de neutrones presente en cualquier momento. Si n_0 neutrones se encuentran presentes inicialmente, y n_1, n_2 neutrones se encuentran presentes en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente, verifique que

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1}.$$

Ejercicio 2.13. Si la mitad de una cierta cantidad del elemento radioactivo radio se desintegra en 1600 años, ¿que porcentaje de la cantidad inicial quedará luego de 2400 años? ¿Y al final de 8000 años?

Ejercicio 2.14. Si la vida media de una sustancia radioactiva es de 20 días, ¿cuánto tiempo le tomará para que el 99% de la sustancia se desintegre?

Ejercicio 2.15. Un tanque contiene 100 galones de una mezcla de 40 libras de sal con agua. Se desea reducir la concentración de sal a 0.1 libras por galón. Esto se va a hacer añadiendo agua pura al tanque a razón de 5 galones por minuto, manteniendo la mezcla uniforme. La mezcla sale del tanque a la misma razón a la que entra el agua pura. ¿Cuánto tiempo tomaría reducir la concentración de la mezcla en el tanque a 0.1 libras por galón?

Ejercicio 2.16. De acuerdo a la ley de absorción de Lambert, el porcentaje de luz incidente absorbida por una placa fina de material transluciente, es proporcional al grosor de la placa. Si la intensidad de la luz del sol que incide verticalmente en agua de océano se reduce a la mitad a una profundidad de 10 pies, ¿a que profundidad se reducirá a $\frac{1}{16}$ de su intensidad inicial? Este problema se puede analizar tanto directamente como utilizando ecuaciones diferenciales.

Ejercicio 2.17. Imagine una columna de aire, con área transversal de una pulgada cuadrada, que se extiende desde el nivel del mar hacia arriba indefinidamente. La presión atmosférica p a una altura h sobre el nivel del mar es igual al peso de la sección de esta columna sobre la altura h . Suponiendo que la densidad del aire es proporcional a la presión, verifique que p satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dh} = -cp, \quad c > 0.$$

Obtenga ahora la formula $p = p_0 e^{-ch}$, donde p_0 es la presión atmosférica al nivel del mar.

Ejercicio 2.18. Un torpedo se esta moviendo a una rapidez de 60 millas por horas al momento en que se le termina el combustible. Si el agua ejerce una fuerza de resistencia al movimiento proporcional a la rapidez del torpedo, y si luego de una milla la rapidez del torpedo ha disminuido a 30 millas por hora, ¿cuál es la distancia total recorrida por el torpedo?

Ejercicio 2.19. Suponga que en una cierta reacción química, la sustancia P se transforma en la sustancia X . Sean p la concentración inicial de P y $x(t)$ la concentración de X en tiempo t . Note que $p - x(t)$ es la concentración de P en tiempo t . Si la reacción es “auto-catalítica”, esto es, la rapidez a la que ocurre la reacción es proporcional a x y $p - x$, entonces x satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(p - x),$$

donde α es una constante positiva. Halle $x(t)$ dado que $x(0) = x_0$.

Ejercicio 2.20. Ciertas enfermedades, como la tifoidea, se propagan mayormente vía portadores, esto es, individuos que transmiten la enfermedad pero no muestran síntomas del mismo. Sean $x(t)$ y $y(t)$ las densidades de los portadores y de los individuos susceptibles no infectados respectivamente, en tiempo t . Suponga que los portadores se remueven de la población a una tasa $\beta > 0$, de modo que

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x. \quad (2.23)$$

En adición, suponga que la enfermedad se transmite a una razón proporcional al producto de x y y , de modo que

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy, \quad (2.24)$$

donde $\alpha > 0$.

- a) Resuelva la ecuación diferencial (2.23) con la condición inicial de que $x(0) = x_0$.
- b) Usando el resultado de la parte (a), resuelva la ecuación (2.24) para $y(t)$ con la condición inicial de que $y(0) = y_0$.

- c) Calcule el valor límite de y según $t \rightarrow \infty$. Estudie como el valor de este límite varia con α y β .

Ejercicio 2.21. Para cada una de las siguientes familias de curvas, encuentre la familia de curvas ortogonales correspondientes. Trace ambas familias de curvas en el mismo sistema de coordenadas.

- a) La familia de hipérbolas $xy = c$.
- b) La familia de círculos $(x - c)^2 + y^2 = c^2$.
- c) La familia de elipses $x^2 - xy + y^2 = c^2$.
- d) La familia de parábolas $2cy + x^2 = c^2$, $c > 0$.

Ejercicio 2.22. Una cierta especie de salmones que viven en la costa de Alaska, crecen de acuerdo al modelo Maltusiano:

$$p'(t) = 0.003p(t),$$

donde t se mide en minutos y $p(t)$ es la población de salmón en tiempo t . Al momento t_0 , un grupo de tiburones se establece en el lugar donde crecen los salmones, y comienzan a alimentarse de éstos. La razón a la que los tiburones consumen a los salmones es de $0.001p^2(t)$. En adición y por causa de la presencia de los tiburones, los salmones abandonan la costa a razón de 0.002 salmones por minuto.

- a) Modifique el modelo Maltusiano de crecimiento de la población de modo que incorpore los dos factores adicionales por la presencia de los tiburones.
- b) Suponga que al momento en que $t = 0$, hay un millón de salmones. Determine la función $p(t)$ para la población en cualquier momento t . Determine si alguno, el valor límite de la población según $t \rightarrow \infty$.

Ejercicio 2.23. La población de la ciudad de Nueva York se puede describir utilizando la ley logística:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{2.5 \times 10^7}p^2,$$

donde t se mide en años, y se han descartado los efectos de emigración y muertes por homicidios.

- a) Modifique este modelo para que incluya los efectos de que 6,000 personas por año abandonan la ciudad, y 4,000 mueren por homicidios al año.
- b) Si la población de Nueva York era de 8,000,000 en el 1970, encuentre la función $p(t)$ para la población en cualquier tiempo futuro. ¿Que sucede según $t \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

Ecuaciones de segundo orden

En el caso $n = 2$, la ecuación (1.2) reduce a:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0.$$

Suponemos que esta ecuación se puede escribir de la forma:

$$y''(x) = H(x, y(x), y'(x)). \quad (3.1)$$

El caso especial en que H depende solo de x , la ecuación (3.1) reduce a:

$$y''(x) = H(x).$$

Esta ecuación tiene solución general:

$$f(x) = c_1 + c_2x + \int \left[\int H(x) dx \right] dx,$$

la cuál envuelve las dos constantes arbitrarias c_1, c_2 . Más adelante veremos que la solución general de (3.1) siempre envuelve dos constantes arbitrarias, por lo que es necesario dos condiciones adicionales para determinar dichas constantes. Es por ésto que el problema de valor inicial asociado a (3.1) envuelve las dos condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0, \quad (3.2)$$

donde suponemos que el punto (x_0, y_0, v_0) pertenece al dominio de la función $H(x, y, v)$. El problema de valor inicial de (3.1) sujeto a (3.2) lo escribimos ahora como:

$$\begin{cases} y''(x) = H(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Al igual que para el caso $n = 1$ de la ecuación (1.2), tenemos el siguiente resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones del PVI (3.3).

Teorema 3.1. *Sea R una región en \mathbb{R}^3 donde $H(x, y, v)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, v)$ y $\frac{\partial H}{\partial v}(x, y, v)$ son continuas. Sea $(x_0, y_0, v_0) \in R$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función $f(x)$ definida sobre $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ la cuál es solución de (3.1) en J y satisface (3.2), i.e., f es solución del PVI (3.3). Además la función f es la única solución del PVI (3.3) en el intervalo J .*

3.1 Ecuaciones reducibles a primer orden

Vamos a examinar dos casos especiales de (3.1) que se pueden trabajar con los métodos del capítulo anterior. Primero veamos el caso en que $H(x, y, v)$ no depende de y . En tal caso (3.1) reduce a:

$$y''(x) = H(x, y'(x)).$$

Si tomamos $v(x) = y'(x)$, entonces la ecuación anterior es equivalente a:

$$v'(x) = H(x, v(x)),$$

la cuál es de primer orden para $v(x)$. Si podemos resolver ésta ecuación para $v(x)$, entonces obtenemos la solución de la ecuación original integrando a $v(x)$.

Ejemplo 3.2. La ecuación diferencial:

$$y''(x) + x [y'(x)]^2 = 0,$$

tiene $H(x, y, v) = -xv^2$, i.e., es independiente de y . Con $v(x) = y'(x)$, tenemos que:

$$v'(x) = -xv^2(x),$$

que es separable con solución general:

$$v(x) = \frac{2}{x^2 + c_1}.$$

Tenemos ahora que

$$y'(x) = \frac{2}{x^2 + c_1}.$$

Integrando, en el caso en que $c_1 > 0$, tenemos que la solución general de la ecuación diferencial original es:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \tan^{-1} \left[\frac{x}{\sqrt{c_1}} \right] + c_2.$$

¿Cuáles serían las expresiones correspondientes para los casos $c_1 = 0$ ó $c_1 < 0$? \square

Otro caso especial de (3.1) es cuando $H(x, y, v)$ es independiente de x . En tal caso la ecuación diferencial (3.1) tiene la forma¹:

$$y''(x) = H(y(x), y'(x)). \quad (3.4)$$

Poniendo $v = y'$ tenemos que:

$$\frac{dv}{dx} = H(y, v).$$

Procediendo formalmente tenemos, usando la regla de la cadena, que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}.$$

Así que la ecuación diferencial anterior queda como:

$$v \frac{dv}{dy} = H(y, v),$$

que es de primer orden para v como función de y . Si podemos resolver ésta ecuación para $v(y)$, entonces la solución de la ecuación diferencial original se obtiene resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = v(y),$$

la cuál es separable.

Ejemplo 3.3. La ecuación diferencial:

$$y''(x) + y(x) [y'(x)]^2 = 0,$$

¹En este caso, al igual que para (2.6), la ecuación (3.1) se llama *autónoma*.

tiene $H(x, y, v) = -yv^2$ que es independiente de x . Con $v = y'$ la ecuación queda como:

$$v \frac{dv}{dy} = -yv^2,$$

la cuál es separable con solución general:

$$v(y) = c_1 e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Ahora tenemos que resolver:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 e^{-\frac{y^2}{2}},$$

que es separable. Separando las variables e integrando tenemos que $y(x)$ está dada de forma implícita por:

$$\int e^{\frac{y^2}{2}} dy = c_1 x + c_2.$$

□

3.2 Ecuaciones lineales

Recuerde que la ecuación (3.1) es lineal cuando ésta es de la forma:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x).$$

Para los valores de x donde $a(x) \neq 0$, podemos dividir la ecuación por $a(x)$ para obtener:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \quad (3.5)$$

donde hemos puesto que:

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}, \quad g(x) = \frac{d(x)}{a(x)}.$$

La ecuación:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (3.6)$$

se llama la *ecuación homogénea* asociada a (3.5), mientras que a (3.5) se le llama la *ecuación no-homogénea*. Note que $y(x) \equiv 0$ es siempre solución de (3.6).

Al igual que para el caso de la ecuación diferencial lineal de orden uno, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4 (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales). *Suponga que las funciones p , q y g en (3.5) son continuas en el intervalo $J = (\alpha, \beta)$ y que $x_0 \in J$. Entonces para cualquier $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$, el PVI:*

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0, \end{cases}$$

tiene una solución f que es única y cuyo intervalo máximo de existencia es J .

Ejemplo 3.5. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) + (\ln x)y(x) = \tan x, \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = -5. \end{cases}$$

El intervalo más grande que contiene a $x_0 = 1$ y donde las funciones x^2 , $\ln x$, y $\tan x$ son todas continuas, es $(0, \frac{\pi}{2})$. Tenemos entonces que la solución del PVI anterior tiene intervalo máximo de existencia $J = (0, \frac{\pi}{2})$. \square

De aquí en adelante suponemos que las condiciones del teorema en los coeficientes p, q, g de la ecuación (3.5) se cumplen en el intervalo (α, β) .

Para cualquier entero $k \geq 0$, escribimos $C^k(\alpha, \beta)$ para representar al conjunto de funciones que tienen hasta k derivadas, todas continuas en el intervalo (α, β) . Si $k = 0$, escribimos $C(\alpha, \beta)$ en lugar de $C^0(\alpha, \beta)$. Definimos ahora la función $L : C^2(\alpha, \beta) \rightarrow C(\alpha, \beta)$ por:

$$L[y] = y'' + py' + qy. \quad (3.7)$$

L se llama un *operador diferencial de orden dos*. Esta es la notación *funcional* del operador L pero podemos usar también la notación *puntual*:

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Podemos ahora escribir la ecuación (3.5) como $L[y] = g$, y la ecuación homogénea (3.6) como $L[y] = 0$.

3.2.1 La ecuación homogénea

El operador L tiene la siguiente importante propiedad:

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2], \quad (3.8)$$

para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y toda $y_1, y_2 \in C^2(\alpha, \beta)$. Esta propiedad, que establece que L es un *operador lineal*, tiene la siguiente importante consecuencia con relación a la ecuación homogénea (3.6).

Teorema 3.6 (Principio de superposición). Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea (3.6). Entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es también solución de la ecuación homogénea para cualquier $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Comentario 3.7. Este resultado depende intrínsecamente de la propiedad (3.8) del operador L . Por ejemplo, para el operador $N[y] = y'' + y^2$, y suponiendo que $N[y_1] = N[y_2] = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} N[y_1 + y_2] &= (y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2)^2, \\ &= N[y_1] + N[y_2] + 2y_1y_2 = 2y_1y_2, \end{aligned}$$

lo cuál en general es distinto de cero, ya que $N[y_1] = N[y_2] = 0$ no obliga a que $y_1y_2 = 0$. Así que $y_1 + y_2$ en general no es solución de $N[y] = 0$.

El teorema anterior implica que si y_1, y_2 son soluciones de (3.6), ambas distintas de la solución cero, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es una familia (infinita) de soluciones de la ecuación homogénea. Vamos a estudiar ahora bajo que condiciones ésta familia infinita de soluciones, es de hecho la solución general de la ecuación homogénea.

Dadas dos funciones $y_1, y_2 \in C^1(\alpha, \beta)$ completamente arbitrarias, el determinante:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (3.9)$$

se llama el *Wronskiano* de y_1, y_2 . Al igual que con el operador L , usamos de forma intercambiada las notaciones $W[y_1, y_2]$ ó $W[y_1, y_2](x)$ con $x \in (\alpha, \beta)$.

Ejemplo 3.8. Con $y_1(x) = x^2 + x$, $y_2(x) = x^2 + 2x + 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} x^2 + x & x^2 + 2x + 1 \\ 2x + 1 & 2x + 2 \end{vmatrix}, \\ &= (x^2 + x)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 1)(2x + 1), \\ &= -(x + 1)^2. \end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. □

Cuando las funciones $\{y_1, y_2\}$ en la definición de W son además soluciones de $L[y] = 0$, entonces el Wronskiano tiene la siguiente propiedad.

Lema 3.9. Sean $y_1, y_2 \in C^2(\alpha, \beta)$ soluciones de la ecuación homogénea (3.6). Entonces $W[y_1, y_2](x) = 0$ para toda $x \in (\alpha, \beta)$ ó $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para toda $x \in (\alpha, \beta)$.

Ejemplo 3.10. Note que $y_1(x) = \cos(\ln x)$, $y_2(x) = \text{sen}(\ln x)$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0,$$

en el intervalo $J = (0, \infty)$. Para éstas funciones:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \text{sen}(\ln x) \\ -\frac{1}{x} \text{sen}(\ln x) & \frac{1}{x} \cos(\ln x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \neq 0,$$

para toda $x \in (0, \infty)$. Por otro lado, con $y_1(x) = \text{sen}(\ln x)$ y $y_2(x) = 2 \text{sen}(\ln x)$, ambas soluciones de ésta ecuación diferencial, tenemos que:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \text{sen}(\ln x) & 2 \text{sen}(\ln x) \\ \frac{1}{x} \cos(\ln x) & \frac{2}{x} \cos(\ln x) \end{vmatrix} = 0,$$

para toda $x \in (0, \infty)$. □

Decimos que dos soluciones y_1, y_2 de la ecuación homogénea (3.6) forman un *conjunto fundamental* de (3.6), si para cualquier función $y \in C^2(\alpha, \beta)$ con $L[y] = 0$, existen constantes c_1, c_2 tal que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Usando el Lema 3.9 y el Teorema 3.4 se puede verificar el siguiente resultado:

Teorema 3.11. Sean $y_1, y_2 \in C^2(\alpha, \beta)$ soluciones de la ecuación homogénea (3.6). Si $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ para algún punto $x_0 \in (\alpha, \beta)$, entonces $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de (3.6).

Ejemplo 3.12. Note que $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \text{sen} x$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Como:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen} x \\ -\text{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \neq 0,$$

tenemos que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación diferencial. Suponga que nos interesa resolver el PVI:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Como $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación diferencial, la solución $y(x)$ del PVI se puede escribir como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

para algunas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aplicando las condiciones iniciales a la ecuación anterior en $x = 0$, tenemos que:

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 2, \\ -c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = 1, \end{cases}$$

de donde obtenemos que $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Así que

$$y(x) = 2 \cos x + \operatorname{sen} x,$$

es la solución del PVI. □

Combinando los resultados de los Teoremas 3.4 y 3.11, podemos verificar que la ecuación (3.6) siempre tiene al menos un conjunto fundamental. Para ver esto note que por el Teorema 3.4, para cualquier $x_0 \in (\alpha, \beta)$, el PVI:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \\ y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \end{cases}$$

tiene solución $y_1(x)$, mientras que el PVI:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \\ y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \end{cases}$$

también tiene solución que denotamos por $y_2(x)$. Como:

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

tenemos por el Teorema 3.11 que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental para (3.6).

3.2.2 Construcción de conjuntos fundamentales

Aunque la ecuación (3.6) siempre tiene al menos un conjunto fundamental, éstos se pueden construir explícitamente solo para ciertos tipos de ecuaciones. No obstante, los casos especiales donde es posible hallar o construir los conjuntos fundamentales, ocurren frecuentemente en las aplicaciones por lo que éstos resultados son de gran utilidad.

Reducción de orden

Consideramos primero el caso en que de alguna forma, tenemos a mano una solución y_1 (distinta de la función cero) de la ecuación homogénea (3.6). A partir de y_1 construimos otra función y_2 de modo que $\{y_1, y_2\}$ sea un conjunto fundamental de (3.6).

Sea $v(x)$ una función (por determinarse) y defina $y_2 = vy_1$. La idea es tratar de buscar una función v de modo que $L[y_2] = 0$. Note que:

$$\begin{aligned} y_2' &= vy_1' + v'y_1, \\ y_2'' &= vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} L[y_2] &= (vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) + p(vy_1' + v'y_1) + qvy_1, \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v', \end{aligned}$$

donde usamos que como y_1 es solución de (3.6), entonces:

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Si buscamos una función v tal que $L[y_2] = 0$, entonces es necesario que:

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0.$$

Con la sustitución $u = v'$, ésta ecuación reduce a una de primer orden para u , y luego de una integración obtenemos la siguiente expresión para v :

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp \left[- \int^x p(\xi) d\xi \right] dx.$$

Como $y_2/y_1 = v \neq$ constante, se puede verificar que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental para (3.6).

Ejemplo 3.13. Es fácil verificar que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación diferencial:

$$x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0.$$

Buscamos una segunda solución y_2 de la forma $y_2 = vy_1 = xv$. Como

$$y_2' = xv' + v, \quad y_2'' = xv'' + 2v',$$

tenemos que

$$x^2 y_2''(x) + x y_2'(x) - y_2(x) = x^3 v''(x) + 3x^2 v'(x).$$

Así que la ecuación diferencial original es equivalente a:

$$v''(x) + \frac{3}{x} v'(x) = 0.$$

Con $u = v'$ tenemos que

$$u'(x) = -\frac{3}{x} u(x),$$

la cuál es lineal (y separable) con solución (particular) $u(x) = x^{-3}$. Integrando u , obtenemos que $v(x) = -(1/2)x^{-2}$. Finalmente tenemos que

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = -\frac{1}{2x}.$$

Note que

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{2x} \\ 1 & \frac{1}{2x^2} \end{vmatrix} = x \left(\frac{1}{2x^2} \right) - \left(-\frac{1}{2x} \right) (1) = \frac{1}{x},$$

por lo que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental en $(-\infty, 0)$ ó en $(0, \infty)$. \square

Coefficientes constantes

Consideramos ahora el caso especial en que (3.6) es de la forma:

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.10)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Por el Teorema 3.4 las soluciones de ésta ecuación existen y están definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Si buscamos soluciones de (3.10) de la forma $y(x) = e^{rx}$ para alguna constante $r \in \mathbb{C}$, tenemos luego de sustituir en (3.10) y simplificar que:

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3.11)$$

Esta ecuación se llama la *ecuación auxiliar o característica* de (3.10). Sus soluciones están dadas por la formula cuadrática:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tenemos ahora tres casos:

- i) ($b^2 - 4ac > 0$) En este caso, las raíces r_1, r_2 de la ecuación característica son ambas reales y distintas. Tenemos entonces dos soluciones de (3.10):

$$y_1(x) = e^{r_1x}, \quad y_2(x) = e^{r_2x}.$$

Como

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0,$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de (3.10).

Ejemplo 3.14. La ecuación:

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

tiene ecuación característica:

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0,$$

por lo que $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$. Tenemos entonces que $\{e^x, e^{-2x}\}$ es un conjunto fundamental para la ecuación diferencial original, y que

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x},$$

es la solución general. □

- ii) ($b^2 - 4ac = 0$) Tenemos una solución:

$$y_1(x) = e^{rx}, \quad r = -\frac{b}{2a},$$

de (3.10). Podemos ahora usar el método de reducción de orden discutido en la sección anterior para buscar otra solución. De hecho, tomando $y_2(x) = v(x)e^{rx}$ y obligando a que esto sea una solución de (3.10), obtenemos que $v''(x) = 0$, por lo que $v(x) = x$ es una posibilidad. Tenemos entonces que

$$y_2(x) = xe^{rx},$$

es solución de (3.10). Como

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (rx + 1)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0,$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de (3.10).

Ejemplo 3.15. La ecuación:

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

tiene ecuación característica:

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0,$$

con raíz (doble) $r = 1$. Tenemos entonces que $\{e^x, xe^x\}$ es un conjunto fundamental para la ecuación diferencial original, y que

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x,$$

es la solución general. \square

iii) ($b^2 - 4ac < 0$) En este caso, las raíces de la ecuación característica (3.11) son números complejos conjugados, ésto es:

$$r_1 = \lambda + \mu i, \quad r_2 = \lambda - \mu i, \quad \mu \neq 0.$$

Así que $\{e^{(\lambda+\mu i)x}, e^{(\lambda-\mu i)x}\}$ son soluciones de la ecuación homogénea (3.10). Por el principio de superposición (Teorema 3.6):

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} \cos \mu x &= \frac{e^{(\lambda+\mu i)x} + e^{(\lambda-\mu i)x}}{2}, \\ e^{\lambda x} \sin \mu x &= \frac{e^{(\lambda+\mu i)x} - e^{(\lambda-\mu i)x}}{2i}, \end{aligned}$$

son también soluciones de la ecuación homogénea (3.10). Como:

$$W[e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x] = \mu e^{2\lambda x} \neq 0,$$

entonces $\{e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x\}$ es un conjunto fundamental para (3.10).

Ejemplo 3.16. La ecuación:

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

tiene ecuación característica:

$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

que tiene raíces complejas $1 \pm i$. Así que con $\lambda = 1$, y $\mu = 1$ en las formulas anteriores, tenemos que $\{e^x \cos x, e^x \sin x\}$ es un conjunto fundamental para la ecuación diferencial original, y que

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

es la solución general. \square

3.2.3 La ecuación no-homogénea

Vamos ahora a retomar la discusión de la ecuación no-homogénea (3.5). Recuerde que podemos escribir ésta ecuación en términos del operador L dado por (3.7), como:

$$L[y] = g. \quad (3.12)$$

Cualquier solución (conocida) y_p de ésta ecuación, obtenida de alguna forma², la llamaremos una *solución particular* de (3.12). Veamos como los conceptos que discutimos sobre la ecuación homogénea (3.6) nos ayudan a construir soluciones de la ecuación no-homogénea.

Si u, v son soluciones de (3.12), esto es:

$$L[u] = g, \quad L[v] = g,$$

entonces, por la propiedad (3.8), tenemos que:

$$L[u - v] = L[u] - L[v] = g - g = 0.$$

Es decir, que $u - v$ es solución de la ecuación homogénea (3.6). Podemos ahora expresar $u - v$ en términos de cualquier conjunto fundamental de la ecuación homogénea. Esta observación es suficiente para concluir el siguiente resultado:

Teorema 3.17. *Sea y_p una solución particular de la ecuación no-homogénea (3.12) y $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de la ecuación homogénea (3.6). Entonces si y es cualquier otra solución de la ecuación no-homogénea (3.12), existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) es la solución general de la ecuación no-homogénea (3.12). Al término $c_1 y_1 + c_2 y_2$ en (3.13) se le llama la *solución complementaria*.

3.2.4 Construcción de soluciones particulares

Ya vimos en la Sección 3.2.2 varios métodos para construir conjuntos fundamentales de la ecuación homogénea. Con ésto y el teorema anterior, el problema de resolver la ecuación no-homogénea (3.12) se reduce al de buscar soluciones particulares de la no-homogénea.

²Más adelante discutiremos varios métodos para buscar soluciones particulares.

El método de coeficientes indeterminados

Consideramos el caso de (3.12) en que el operador L es como en (3.10), esto es:

$$L[y] \equiv ay'' + by' + cy = g, \quad (3.14)$$

donde los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. En este caso si g , el lado derecho de (3.14), tiene una forma especial como de tipo exponencial, o trigonométrica, o polinómica, entonces sus derivadas son del mismo tipo por lo que se espera que la solución de la ecuación diferencial sea del mismo tipo. Esta es la idea básica en el método de coeficientes indeterminados. Describimos ahora el método por casos según el tipo de lado derecho en (3.14).

- i) Caso en que $g(x) = Ce^{qx}$ para algunas constantes C y q dadas o conocidas. En este caso buscamos una solución particular de (3.14) de la forma $y_p(x) = Ae^{qx}$. Sustituyendo en (3.14), luego de simplificar tenemos que:

$$A = \frac{C}{aq^2 + bq + c},$$

siempre que $aq^2 + bq + c \neq 0$, esto es cuando q no es una raíz de la ecuación característica (3.11).

Si q es raíz de la ecuación característica (3.11), entonces tratamos $y_p(x) = Axe^{qx}$. Como

$$y_p'(x) = A(qx + 1)e^{qx}, \quad y_p''(x) = A(q^2x + 2q)e^{qx},$$

sustituyendo en $L[y] = g$ tenemos que:

$$A(a(q^2x + 2q) + b(qx + 1) + cx)e^{qx} = Ce^{qx},$$

es decir:

$$A = \frac{C}{2aq + b},$$

siempre que $2aq + b \neq 0$.

Note que $2aq + b = 0$ si $q = -b/(2a)$ es raíz doble de la ecuación característica (3.11). En este caso tratamos $y_p(x) = Ax^2e^{qx}$. Haciendo un cálculo similar al del caso anterior se obtiene que ahora:

$$A = \frac{C}{2a}.$$

Ejemplo 3.18. Buscamos una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}. \quad (3.15)$$

La ecuación característica correspondiente es:

$$r^2 + 3r - 10 = (r - 2)(r + 5) = 0,$$

Como 4 no es raíz de ésta ecuación, buscamos una solución particular de la forma $y_p(x) = Ae^{4x}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando tenemos que $A = 1/3$ por lo que la solución particular es:

$$y_p(x) = \frac{1}{3} e^{4x}.$$

Note que como la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' + 3y' - 10y = 0,$$

es $c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$, entonces la solución general de (3.15) es

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{4x} + c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}.$$

□

- ii) Caso en que $g(x) = C \operatorname{sen} \beta x$ ó $g(x) = C \operatorname{cos} \beta x$ donde $\beta \neq 0$. Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = A \operatorname{sen} \beta x + B \operatorname{cos} \beta x.$$

Como

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \beta(A \operatorname{cos} \beta x - B \operatorname{sen} \beta x), \\ y_p''(x) &= -\beta^2(A \operatorname{sen} \beta x + B \operatorname{cos} \beta x), \end{aligned}$$

tenemos para el caso $g(x) = C \operatorname{sen} \beta x$, y luego de sustituir en la ecuación diferencial (3.14) y simplificar que:

$$[(-a\beta^2 + c)A - b\beta B] \operatorname{sen} \beta x + [b\beta A + (-a\beta^2 + c)B] \operatorname{cos} \beta x = C \operatorname{sen} \beta x.$$

Esta ecuación a su vez es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -a\beta^2 + c & -b\beta \\ b\beta & -a\beta^2 + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si la matriz de coeficientes de este sistema es noringular, entonces los coeficientes A, B se pueden determinar de forma única. La matriz de coeficientes del sistema es singular si y solo si:

$$(-a\beta^2 + c)^2 + b^2\beta^2 = 0.$$

Esto implica que

$$b = 0, \quad \beta^2 = \frac{c}{a}.$$

Es fácil ver que esto es posible si y solo si las raíces de (3.11) son $r = \pm\beta i$ lo que implica que tanto $\sin \beta x$ como $\cos \beta x$ son soluciones de la ecuación homogénea (3.10). En este caso comenzamos nuevamente tratando una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = x(A \sin \beta x + B \cos \beta x).$$

Ejemplo 3.19. Buscamos una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 2 \cos x. \quad (3.16)$$

Como la ecuación característica correspondiente es $r^2 + 1 = 0$, tenemos que

$$A \cos x + B \sin x,$$

es la solución general de la ecuación homogénea asociada. Como $2 \cos x$ es solución de la ecuación homogénea, entonces buscamos una solución particular de (3.16) de la forma:

$$y_p(x) = x(A \cos x + B \sin x).$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x), \\ y_p''(x) &= 2(-A \sin x + B \cos x) - x(A \cos x + B \sin x). \end{aligned}$$

Luego de sustituir en la ecuación diferencial y simplificar, llegamos a que:

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 2 \cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\sin x$ y $\cos x$ en ambos lados de ésta ecuación obtenemos que $A = 0$, $B = 1$ por lo que la solución particular es:

$$y_p(x) = x \sin x.$$

La solución general de (3.16) es:

$$y(x) = x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

□

- iii) Este es el caso en que $g(x)$ es polinomio de grado n . Buscamos una solución particular que sea un polinomio de grado n también, es decir de la forma:

$$y_p(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n.$$

Esto funciona siempre que $c \neq 0$. Si $c = 0$ tratamos:

$$y_p(x) = x(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n),$$

lo cuál funciona siempre que $b \neq 0$. Si $b = 0$, la ecuación diferencial dada se puede resolver con dos integraciones.

Ejemplo 3.20. Buscamos una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12.$$

Tratamos una solución de la forma:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Así que

$$y'_p(x) = 2Ax + B, \quad y''_p(x) = 2A.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando tenemos que:

$$5Ax^2 + (-4A + 5B)x + (2A - 2B + 5C) = 25x^2 + 12.$$

Igualando coeficientes en ambos lados tenemos que:

$$\begin{cases} 2A - 2B + 5C & = & 12, \\ -4A + 5B & = & 0, \\ 5A & = & 25. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, por lo que la solución particular es:

$$y_p(x) = 5x^2 + 4x + 2.$$

□

iv) Para el caso

$$g(x) = e^{qx}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n),$$

buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = e^{qx}(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n).$$

Si $L[y_p] = 0$, tratamos multiplicando la expresión anterior por x . Si esto falla nuevamente, tratamos multiplicando la expresión de arriba por x^2 .

Ejemplo 3.21. Buscamos una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y'' + y = xe^x.$$

Tratamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x.$$

Tenemos que:

$$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \quad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y luego de simplificar, tenemos que:

$$2Ax + (2A + 2B) = x.$$

Igualando coeficientes en ambos lados obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A & = 1, \\ 2A + 2B & = 0. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución $A = 1/2$, $B = -1/2$ por lo que la solución particular es:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(x - 1)e^x.$$

□

v) El caso mas general que vamos a considerar es cuando

$$g(x) = e^{qx} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \begin{cases} \text{sen } \beta x, \\ \text{cos } \beta x. \end{cases}$$

Aquí tratamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = e^{qx} [(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n) \text{sen } \beta x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n) \text{cos } \beta x].$$

Si $L[y_p] = 0$ tratamos x por la expresión de arriba. Si esto falla nuevamente, tratamos multiplicando la expresión de arriba por x^2 .

Ejemplo 3.22. Buscamos una solución particular de la ecuación:

$$y'' + y = xe^x \text{sen } x.$$

Tratamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = e^x [(Ax + B) \text{sen } x + (Cx + D) \text{cos } x].$$

Tenemos ahora que:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^x [((A - C)x + A + B - D) \text{sen } x \\ &\quad + ((A + C)x + B + C + D) \text{cos } x], \\ y_p''(x) &= e^x [(-2Cx + 2A - 2C - 2D) \text{sen } x \\ &\quad + (2Ax + 2A + 2B + 2C) \text{cos } x]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando tenemos que:

$$(2A + B - 2C - 2D) \text{sen } x + (2A + 2B + 2C + D) \text{cos } x + (A - 2C)x \text{sen } x + (2A + C)x \text{cos } x = x \text{sen } x.$$

Igualando los coeficientes en ambos lados de los términos semejantes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B - 2C - 2D = 0, \\ 2A + 2B + 2C + D = 0, \\ A - 2C = 1, \\ 2A + C = 0. \end{cases}$$

De las últimas dos ecuaciones tenemos que $A = 1/5$, $C = -2/5$. Sustituyendo estos valores de A, C en las primeras dos ecuaciones, podemos resolver las ecuaciones resultantes obteniendo así que $B = -2/25$, $D = 14/25$. Finalmente, la solución particular es:

$$y_p(x) = e^x \left[\left(\frac{5x - 2}{25} \right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{-10x + 14}{25} \right) \operatorname{cos} x \right].$$

□

En ocasiones, el lado derecho de la ecuación no homogénea (3.14) consiste de una suma de funciones de varios de los tipos que hemos discutido en ésta sección. El siguiente resultado, el cual es consecuencia de la linealidad del operador L (vea (3.8)), nos ayuda en el proceso de buscar soluciones particulares en tal situación.

Lema 3.23. Sean g_1, \dots, g_m funciones y y_{p_1}, \dots, y_{p_m} respectivamente, soluciones particulares de los problemas:

$$L[y] = g_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Entonces $\sum_{i=1}^m y_{p_i}$ es una solución particular de $L[y] = g$ donde $g = \sum_{i=1}^m g_i$.

El siguiente ejemplo ilustra como se utiliza este resultado.

Ejemplo 3.24. Buscamos una solución particular de la ecuación:

$$y'' + y = xe^x + xe^x \operatorname{sen} x.$$

Primero buscamos y_{p_1}, y_{p_2} soluciones particulares de los problemas

$$y'' + y = xe^x,$$

y

$$y'' + y = xe^x \operatorname{sen} x,$$

respectivamente. De los últimos dos ejemplos que trabajamos, sabemos que podemos tomar:

$$\begin{aligned} y_{p_1}(x) &= \frac{1}{2}(x-1)e^x, \\ y_{p_2}(x) &= e^x \left[\left(\frac{5x-2}{25} \right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{-10x+14}{25} \right) \operatorname{cos} x \right]. \end{aligned}$$

Así que una solución particular para la ecuación diferencial original es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, esto es:

$$y_p(x) = e^x \left[\frac{1}{2}(x-1) + \left(\frac{5x-2}{25} \right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{-10x+14}{25} \right) \operatorname{cos} x \right].$$

□

El método de variación de parámetros

El método que discutiremos en esta sección para buscar soluciones particulares de la ecuación no-homogénea, es más general que el de la sección anterior ya que trabajamos con una ecuación no-homogénea que en general puede tener coeficientes variables. Esto es buscamos soluciones particulares de la ecuación:

$$L[y] = y'' + py' + qy = g, \quad (3.17)$$

donde p, q, g son funciones en $C(\alpha, \beta)$ no necesariamente constantes. La única limitación o restricción de éste método es que presupone que tenemos un conjunto fundamental de la ecuación homogénea. En el caso particular en que p, q son constantes, el método puede ser útil aún para lados derechos g más generales que los discutidos en la sección anterior.

Suponga que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Buscamos una solución particular de (3.17) de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

para algunas funciones u_1, u_2 por determinarse. Tenemos ahora que:

$$y'_p = u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2.$$

Vamos a poner la siguiente condición en u_1, u_2 :³

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0. \quad (3.18)$$

Usando ésto tenemos ahora que $y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$ por lo que

$$y''_p = u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2.$$

³La motivación para la condición (3.18) no es clara, pero puede interpretarse como un tipo de ortogonalidad entre las funciones $\{u_1, u_2\}$ y $\{y_1, y_2\}$.

Tenemos ahora que:

$$\begin{aligned} L[y_p] &= u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' \\ &\quad + p(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(u_1 y_1 + u_2 y_2), \\ &= u_1 L[y_1] + u_2 L[y_2] + u_1' y_1' + u_2' y_2', \\ &= u_1' y_1' + u_2' y_2'. \end{aligned}$$

De aquí que la ecuación (3.17) es equivalente a:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g. \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.18) y (3.19) son equivalentes al sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}.$$

Note que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es $W[y_1, y_2]$ el cuál es distinto de cero para todo punto en (α, β) ya que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental. Es fácil ver que la solución del sistema es:

$$u_1' = -\frac{g y_2}{W[y_1, y_2]}, \quad u_2' = \frac{g y_1}{W[y_1, y_2]},$$

de donde obtenemos que:

$$u_1(x) = -\int \frac{g(x) y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{g(x) y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx. \quad (3.20)$$

La solución particular de la ecuación no-homogénea queda entonces como:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{g(x) y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx + y_2(x) \int \frac{g(x) y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx. \quad (3.21)$$

Ejemplo 3.25. Vamos a trabajar el problema de resolver la ecuación diferencial:

$$-(xy'(x))' + \frac{1}{x} y(x) = xe^x,$$

en el intervalo $(0, \infty)$. Note que los coeficientes de la ecuación diferencial no son constantes. Escribimos la ecuación de modo que el coeficiente de y'' sea uno:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = -e^x.$$

Se puede verificar que $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-1}$ es un conjunto fundamental⁴ de la ecuación homogénea:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = 0.$$

Tenemos entonces que:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}.$$

De (3.20) tenemos que:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{1}{2} \int e^x dx = -\frac{1}{2} e^x, \\ u_2(x) &= \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx = \frac{1}{2} (2 - 2x + x^2) e^x. \end{aligned}$$

La solución particular de la ecuación homogénea es:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{2} (2x^{-1} - 2 + x) e^x = (x^{-1} - 1) e^x,$$

y la solución general:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} + (x^{-1} - 1) e^x.$$

□

3.3 Vibraciones mecánicas

Vamos a estudiar un sistema de masa-resorte como en el Ejemplo 1.2 pero con fricción. Asumiendo que la fricción en este sistema es proporcional a la velocidad de la masa, entonces la ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ de la masa a partir de la posición de equilibrio, está dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (3.22)$$

⁴El cambio de variable independiente $z = \ln x$ convierte la ecuación diferencial homogénea a una de coeficientes constantes. Resolviendo la ecuación resultante y volviendo el cambio de variables a x , se obtienen y_1, y_2 .

donde m es la masa, c es la constante de proporcionalidad de la fricción, k es la constante del resorte, y f es una fuerza externa aplicada. Note que el operador diferencial en esta ecuación es de coeficientes constantes. Esta ecuación puede describir diferentes tipos de movimientos dependiendo de los tamaños relativos de los coeficientes, y si hay o no fuerza externa. Cuando $f = 0$ en la ecuación, decimos que las vibraciones son *libres*. De lo contrario decimos que las vibraciones son *forzadas*.

3.3.1 Vibraciones libres y sin fricción

Este es el caso de (3.22) en que $c = 0$ y $f = 0$. Tenemos entonces la ecuación:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (3.23)$$

que tiene ecuación característica:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Si definimos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

llamada la *frecuencia natural* del sistema, entonces la ecuación característica tiene raíces $r = \pm i\omega_0$, por lo que (3.23) tiene solución general:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t = R \cos(\omega_0 t - \delta), \quad (3.24)$$

donde $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, y δ satisface que:

$$\cos \delta = \frac{A}{R}, \quad \operatorname{sen} \delta = \frac{B}{R}.$$

Note que $x(t)$ representa un movimiento periódico, llamado también *movimiento armónico simple*. El periodo de $x(t)$ es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (3.25)$$

y se le llama el *periodo natural* del sistema. Note que el movimiento por ser periódico, no decae con el tiempo, es decir, la amplitud R es constante.

Ejemplo 3.26. Considere un sistema de masa–resorte donde la masa pesa 10 lbs. La masa alarga el resorte por 5 pulgadas cuando ésta se cuelga del resorte y el sistema se mantiene en equilibrio. Como la fuerza que ejerce el resorte en la masa es $k \times$ (desplazamiento), tenemos que en esta situación de equilibrio:

$$10 \text{ lbs} = k(5 \text{ pulg}),$$

es decir que

$$k = 2 \text{ lbs/pulg} = 24 \text{ lbs/pies}.$$

En adición, de la relación:

$$\text{peso} = mg,$$

donde g es la constante de gravedad, tenemos que la masa m es:

$$m = \frac{10 \text{ lbs}}{32 \text{ pies/seg}^2} = \frac{5}{16} \text{ slugs}.$$

El periodo natural del sistema es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{5/16}{24}} = 0.7170 \text{ seg}.$$

Supongamos ahora que el sistema se pone en movimiento a partir de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 pies/seg. Entonces tenemos las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 5.$$

Sustituyendo en (3.24) tenemos que:

$$R \cos \delta = 0, \quad R\omega_0 \sin \delta = 5.$$

Resolviendo obtenemos que $\delta = \pi/2$, $R = 5/\omega_0$. Así que la ecuación para el desplazamiento del sistema es:

$$x(t) = \frac{5}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right),$$

donde la frecuencia natural es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{5/16}} = 8.7636 \text{ seg}^{-1}.$$

□

3.3.2 Vibraciones libres con fricción

Consideramos ahora el caso de (3.22) donde solamente $f = 0$. La ecuación reduce en este caso a::

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (3.26)$$

La ecuación característica ahora es:

$$mr^2 + cr + k = 0,$$

que tiene raíces:

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Como $c, k, m > 0$, tenemos que:

- i) Si $c^2 - 4km > 0$, entonces ambas raíces son reales y negativas por lo que la solución de (3.26) está dada por:

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

- ii) Si $c^2 - 4km = 0$, entonces ambas raíces son iguales a $r = -c/(2m) < 0$ y el desplazamiento del sistema está dado por:

$$x(t) = (A + Bt)e^{rt}.$$

- iii) Si $c^2 - 4km < 0$, entonces las raíces son complejas con parte real negativa. Si escribimos $r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$ donde:

$$\lambda = -\frac{c}{2m}, \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m},$$

entonces el desplazamiento del sistema en este caso está dada por:

$$x(t) = e^{\lambda t} (A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t).$$

Note que en los tres casos tenemos que $x(t) \rightarrow 0$ según $t \rightarrow \infty$. Esto es consecuencia de la presencia de la fricción en el sistema que actúa como un mecanismo de disipación de energía. Los casos i) y ii) se llaman *sobre y críticamente amortiguado* respectivamente. En ambos casos, la fricción es

el mecanismo dominante. El caso iii) se llama *sub-amortiguado* y en éste la fricción no es tan significativa. Por consiguiente tenemos un comportamiento *quasi-periódico* que decae con el tiempo. En este último caso definimos un *pseudo periodo* por:

$$T_s = \frac{2\pi}{\mu} = T \left[1 - \frac{c^2}{4km} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

donde T está dado por (3.25), y donde usamos que:

$$\mu = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}}.$$

Note que cuando c es pequeño, tenemos que $T_s \approx T$, esto es el pseudo periodo es aproximadamente el periodo natural del sistema (periodo cuando no hay fricción). En la Figura 3.1 ilustramos las gráficas típicas de $x(t)$ para los tres casos. Las primeras dos gráficas ilustran los casos sobre y críticamente amortiguado, y la tercera gráfica el caso sub-amortiguado. En este último caso, las curvas entre-cortadas están dadas por $\pm Re^{\lambda t}$, donde $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, y se llaman las *envolturas* de $x(t)$.

Ejemplo 3.27. Una masa de 10 lbs alarga un resorte por dos pies cuando de sujeta a éste. Como la fuerza que ejerce el resorte en la masa es $k \times$ (desplazamiento), tenemos que en esta situación de equilibrio:

$$10 \text{ lbs} = k(2 \text{ pies}),$$

es decir que

$$k = 5 \text{ lbs/pies}.$$

La masa se cambia ahora por una de 8 lbs. De la relación $\text{peso} = mg$ tenemos que

$$m = \frac{8 \text{ lbs}}{32 \text{ pies/seg}^2} = \frac{1}{4} \text{ slugs}.$$

El sistema masa-resorte se pone en un medio que ofrece una resistencia igual al negativo de la velocidad instantánea. Esto con la información anterior implica que la ecuación diferencial de movimiento está dada por:

$$\frac{1}{4} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 5x(t) = 0.$$

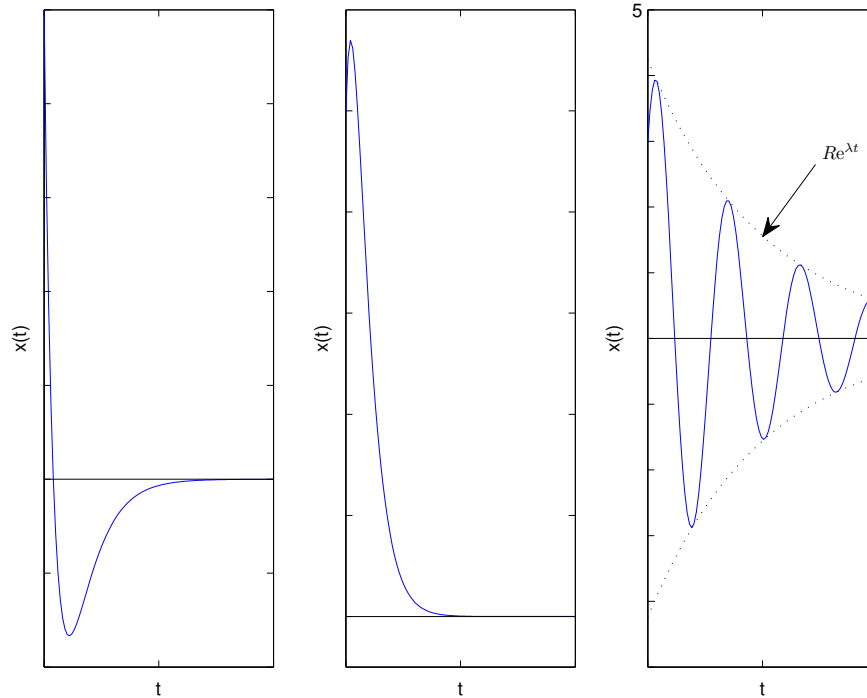


Figura 3.1: Gráficas de $x(t)$ cuando hay fricción. Las primeras dos gráficas ilustran los casos sobre y críticamente amortiguado, y la tercera gráfica el caso sub-amortiguado.

La ecuación característica asociada a ésta ecuación es:

$$\frac{1}{4}r^2 + r + 5 = 0,$$

la cuál tiene raíces $r = -2 \pm 4i$ por lo que estamos en el caso sub-amortiguado. La solución general de la ecuación diferencial está dada entonces por:

$$x(t) = e^{-2t} (A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t).$$

Suponga que la masa se suelta inicialmente de 1/2 pies a la derecha de la posición de equilibrio con una velocidad de 1 pies/seg. Tenemos entonces las condiciones iniciales:

$$x(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

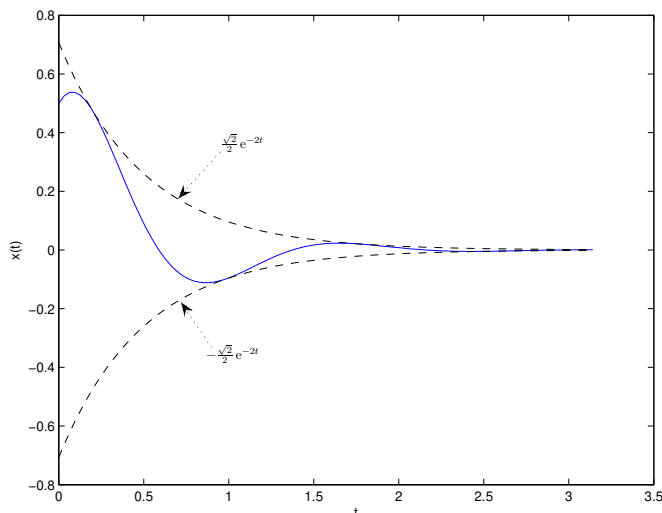


Figura 3.2: La solución $x(t)$ del Ejemplo 3.27 en un caso particular de vibraciones libres con fricción.

Sustituyendo éstas en la solución general, encontramos que $A = B = 1/2$ por lo que el movimiento de la masa está dado por:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} (\cos 4t + \sen 4t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos \left(4t - \frac{\pi}{4} \right).$$

El pseudo periodo del sistema es:

$$T_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

En la Figura 3.2 mostramos la gráfica de $x(t)$. □

3.3.3 Vibraciones forzadas

Estudiamos el caso de vibraciones forzadas donde $f(t)$ tiene la forma particular:

$$f(t) = f_0 \cos \omega t.$$

La ecuación diferencial (3.22) reduce a:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f_0 \cos \omega t. \quad (3.27)$$

Supongamos por el momento que $c = 0$. Tenemos entonces que:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{f_0}{m} \cos \omega t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.28)$$

Buscamos una solución particular de ésta ecuación de la forma:

$$x_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Si $\omega \neq \omega_0$, se puede verificar que:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Como $\{\cos \omega_0 t, \operatorname{sen} \omega_0 t\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, tenemos que la solución general de (3.28) es:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Note que $x(t)$ es una combinación de un movimiento periódico de frecuencia ω_0 con otro periódico de frecuencia ω . Para el caso especial de las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se obtiene que:

$$A = -\frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad B = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t), \\ &= R(\omega) \operatorname{sen} \left[\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} \right) t \right] \operatorname{sen} \left[\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \right) t \right], \end{aligned}$$

donde

$$R(\omega) = \frac{2f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Como

$$\frac{\omega_0 + \omega}{2} > \left| \frac{\omega_0 - \omega}{2} \right|,$$

el término $\sin[(\omega_0 + \omega)/2]t$ oscila más rápidamente que el término $\sin[(\omega_0 - \omega)/2]t$ el cual a su vez actúa como un *modulador de amplitud*. En la Figura 3.3 ilustramos un caso particular de la gráfica de $x(t)$. Las curvas entrecortadas están dadas por $\pm R(\omega) \sin[(\omega_0 - \omega)/2]t$ que actúa como una envoltura para $x(t)$. Este fenómeno se conoce como *latidos* y se observa en aplicaciones de acústica y electrónica.

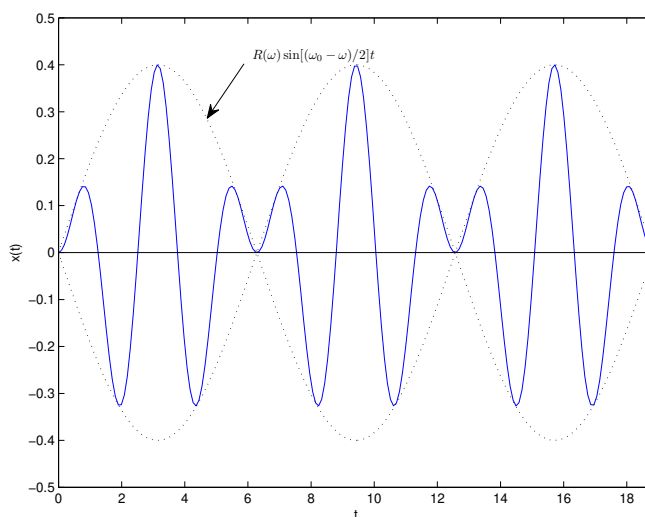


Figura 3.3: Gráfica de $x(t)$ para el caso de vibraciones forzadas sin fricción cuando $\omega \neq \omega_0$ y que ilustra el fenómeno de latidos.

Si $\omega = \omega_0$, entonces el lado derecho de (3.28) es una solución de la ecuación homogénea correspondiente, por lo que hay que tratar una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = t(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y luego de simplificar se obtiene que:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

La solución general de la ecuación (3.28) ahora es:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Note que el término $t \operatorname{sen} \omega_0 t$ crece indefinidamente según $t \rightarrow \infty$. Este fenómeno se conoce como *resonancia* y ocurre cuando la frecuencia ω de la fuerza externa aplicada coincide con la frecuencia natural ω_0 del sistema. En la Figura 3.4 mostramos una gráfica típica para $x(t)$ en este caso.

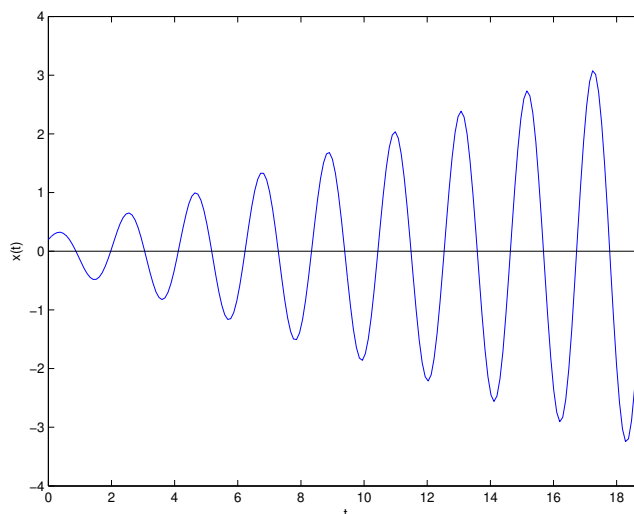


Figura 3.4: Gráfica de $x(t)$ para el caso de vibraciones forzadas sin fricción cuando $\omega = \omega_0$ y que ilustra el fenómeno de resonancia.

En el caso general de las vibraciones forzadas con fricción ($c \neq 0$), la solución general de (3.27) se puede escribir como:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

donde $x_h(t)$ corresponde a una solución de la ecuación homogénea según discutimos en la Sección 3.3.2. En particular, $x_h(t) \rightarrow 0$ según $t \rightarrow \infty$. La solución particular $x_p(t)$ está dada por:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \quad \tan \delta = \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

la cuál es válida aún cuando $\omega = \omega_0$. Tenemos pues que $x(t) \rightarrow x_p(t)$ según $t \rightarrow \infty$. Además, $x(t)$ se mantiene acotada para todo t , consecuencia de la presencia de la fricción en el sistema que actúa como un mecanismo de disipación de energía. Es instructivo observar que podemos maximizar

la amplitud de $x_p(t)$ si minimizamos la expresión $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$ con respecto a ω^2 . La amplitud máxima ocurre cuando:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2.$$

Ejemplo 3.28. Considere un sistema de masa–resorte donde la masa es de un slug, la constante del resorte es 5 lbs/pies, y el coeficiente de fricción es de dos lbs–seg/pies. Suponga que el sistema esta sometido a una fuerza externa dada por:

$$f(t) = 12 \cos 2t + 3 \sen 2t.$$

Combinando esta información, tenemos que la ecuación de movimiento del sistema es:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 12 \cos 2t + 3 \sen 2t.$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

que tiene raíces $r = -1 \pm 2i$. Tenemos pues que $\{e^{-t} \cos 2t, e^{-t} \sen 2t\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada. Buscamos ahora una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = A \cos 2t + B \sen 2t.$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento y despejando para A, B , encontramos que $A = 0$ y $B = 3$. Podemos concluir ahora que la solución general de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = 3 \sen 2t + e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t).$$

Si las condiciones iniciales están dadas por:

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 5,$$

podemos concluir que $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Así que la solución de la ecuación de movimiento para éstas condiciones iniciales es:

$$x(t) = 3 \sen 2t + e^{-t} \cos 2t.$$

Note que $x(t)$ tiende a $3 \sen 2t$ según aumenta la t . En la Figura 3.5 mostramos las gráficas de los dos términos en $x(t)$, y la de $x(t)$. \square

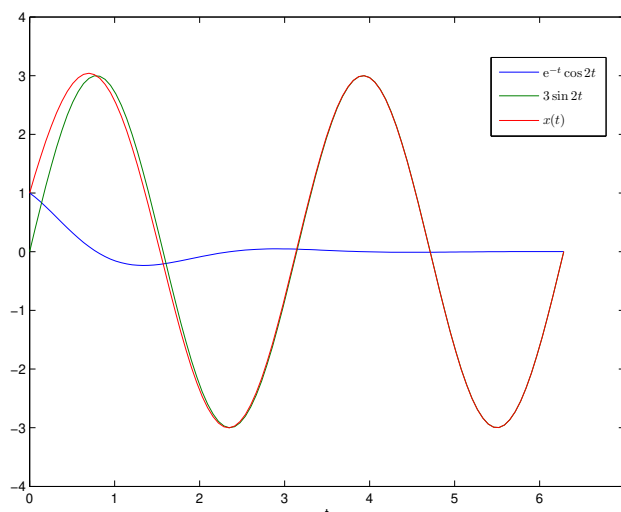


Figura 3.5: La solución $x(t)$ del Ejemplo 3.28 y los términos que la componen, en un caso particular de vibraciones forzadas con fricción.

3.4 Generalizaciones: ecuaciones de orden n

Todos los resultados discutidos en la Sección 3.2 para la ecuación lineal de orden dos, se pueden generalizar a la ecuación lineal de orden $n \geq 1$ dada por:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

No vamos a discutir los detalles de tal generalización ya que estos resultados son un caso especial de la teoría para sistemas que se discutirá en el Capítulo 9. No obstante, si vamos a discutir el caso de la ecuación homogénea de coeficientes constantes. Esto es, consideramos la ecuación:

$$L[y] \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (3.29)$$

donde ahora $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, con $a_n \neq 0$. Es fácil ver que en este caso:

$$L[e^{rx}] = e^{rx} p(r),$$

donde

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0,$$

es el *polinomio característico*. Así que $y(x) = e^{rx}$ es solución de la ecuación homogénea (3.29) si y solo si $p(r) = 0$, la cuál se conoce como la *ecuación característica*. Sabemos por el Teorema A.1 que ésta ecuación tiene n raíces $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Dependiendo de si estas raíces son reales o complejas, la solución general de $L[y] = 0$ se puede escribir de una de varias formas. Sin importar cuál caso, veremos que la solución general siempre envuelve n constantes arbitrarias.

- i) En el caso en que todas las raíces son reales y distintas, tenemos que $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \dots, e^{r_nx}$ forma un conjunto fundamental para $L[y] = 0$. Tenemos pues que la solución general de $L[y] = 0$ está dada por:

$$y(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \dots + c_n e^{r_nx}.$$

Ejemplo 3.29. Para la ecuación diferencial:

$$y''' - y' = 0,$$

tenemos que la ecuación característica es $r^3 - r = 0$, que tiene raíces $r = 0, -1, 1$. Así que $\{1, e^{-x}, e^x\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación por lo que la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x.$$

□

- ii) Suponga como en el caso anterior que no hay raíces repetidas, pero ahora algunas de ellas son complejas. Como los coeficientes de $p(r)$ son reales, por cada raíz compleja $r = \lambda + \mu i$, su conjugado $\lambda - \mu i$ es también una raíz. Estas dos raíces aportan las soluciones linealmente independientes $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$.

Ejemplo 3.30. Para la ecuación diferencial:

$$y''' + y' = 0,$$

tenemos que la ecuación característica es $r^3 + r = 0$, que tiene raíces $r = 0, -i, i$. Así que $\{1, \cos x, \sin x\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación diferencial por lo que la solución general está dada por:

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

□

iii) Suponga ahora que hay raíces repetidas. Si r es raíz real que se repite k veces, $k \geq 2$, entonces:

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx},$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea (3.29) correspondientes a la raíz r . Si $\lambda + \mu i$ es raíz compleja que se repite k veces, entonces $\lambda - \mu i$ es también raíz que se repite k veces, por lo que tenemos las soluciones linealmente independientes:

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, xe^{\lambda x} \cos \mu x, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x} \cos \mu x,$$

$$e^{\lambda x} \sin \mu x, xe^{\lambda x} \sin \mu x, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x} \sin \mu x,$$

correspondientes a las raíces $\lambda \pm \mu i$.

Ejemplo 3.31. La ecuación diferencial:

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0$$

tiene la ecuación característica $r^6 + 2r^4 + r^2 = 0$. Como

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1)^2,$$

tenemos que $r = 0, -i, i$ son las raíces de la ecuación característica, cada una de multiplicidad dos. Correspondiente a la raíz $r = 0$, tenemos las soluciones linealmente independientes $1, x$. Correspondiente a las raíces $\pm i$ tenemos las soluciones linealmente independientes $\cos x, x \cos x, \sin x, y x \sin x$. La solución general de la ecuación diferencial está dada entonces por:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4x \cos x + c_5 \sin x + c_6x \sin x.$$

□

El cómputo de las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial (3.29), puede ser uno muy difícil o complicado. Hay un caso especial de la ecuación diferencial (3.29) que se puede trabajar con el Teorema de De Moivre (Teorema A.3). Esto es cuando la ecuación diferencial es de la forma:

$$ay^{(n)} + by = 0,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Para ésta ecuación diferencial, la ecuación característica está dada por:

$$ar^n + b = 0,$$

lo cuál reduce al problema de hallar las n raíces complejas del número $-b/a$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.32. La ecuación diferencial:

$$y^{(6)} + 2y = 0,$$

tiene la ecuación característica $r^6 + 2 = 0$. Como

$$-2 = 2e^{i\pi},$$

tenemos por el Teorema A.3 que las seis raíces de $r^6 + 2 = 0$ están dadas por:

$$r_k = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Expandiendo obtenemos las raíces:

$$\pm \sqrt[6]{2} i, \frac{\sqrt[6]{2}}{2} (1 \pm \sqrt{3}i), \frac{\sqrt[6]{2}}{2} (-1 \pm \sqrt{3}i),$$

las cuáles aportan respectivamente, las soluciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} & \cos \sqrt[6]{2}x, \text{ sen } \sqrt[6]{2}x, \\ & e^{\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \cos \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right], e^{\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \text{ sen } \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right], \\ & e^{-\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \cos \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right], e^{-\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \text{ sen } \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right]. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} y(x) = & c_1 \cos \sqrt[6]{2}x + c_2 \text{ sen } \sqrt[6]{2}x \\ & + e^{\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right] + c_4 \text{ sen } \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right] \right) \\ & + e^{-\frac{\sqrt[6]{2}}{2}x} \left(c_5 \cos \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right] + c_6 \text{ sen } \left[\frac{\sqrt[6]{2}}{2} \sqrt{3}x \right] \right). \end{aligned}$$

□

3.5 Problemas de frontera de Sturm-Liouville

En el PVI (3.3) las condiciones iniciales se especifican ambas en $x = x_0$. En un problema de frontera, las condiciones extra o adicionales que debe cumplir la solución de la ecuación diferencial dada, se especifican para dos valores de x , que denotamos por $x = a$ y $x = b$. Además estas condiciones suelen estar dadas por dos ecuaciones que envuelven $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$ y $y'(b)$. En esta sección vamos a presentar un resumen de la teoría de problemas de frontera de tipo Sturm-Liouville.

Para funciones p y q continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$, definimos el operador diferencial de *Sturm-Liouville* por:

$$L[y](x) \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x), \quad x \in (a, b). \quad (3.30)$$

Si r es otra función continua y positiva en $[a, b]$, el problema de frontera de Sturm-Liouville consiste en hallar una función y (que no sea la función cero) y un escalar λ , tal que

$$L[y](x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \in (a, b), \quad (3.31a)$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0, \quad (3.31b)$$

donde suponemos que $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ y $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$. Las condiciones (3.31b) se llaman las *condiciones de frontera*⁵. Los valores de λ para los cuales este problema tiene soluciones y distintas de la función cero, se llaman *autovalores* y las y 's correspondientes son las *auto-funciones* del operador L asociadas a λ . El siguiente resultado (cf. [5], [8]) establece la existencia de autovalores y auto-funciones para L .

Teorema 3.33. *Sean p , q , y r funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Entonces*

1. *los autovalores de L son reales y forman una secuencia estrictamente creciente (λ_i) tal que $\lambda_i \rightarrow \infty$ según $i \rightarrow \infty$.*
2. *Para un autovalor λ_i cualquiera, el conjunto de soluciones de (3.31) es un espacio vectorial de dimensión uno.*

⁵En general, las condiciones de frontera pueden ser de la forma $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ donde A es una matriz 2×4 y $\mathbf{u} = (y(a), y'(a), y(b), y'(b))^t$.

3. Si y_i y y_j son auto-funciones correspondientes a los autovalores λ_i y λ_j con $i \neq j$, entonces

$$\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x) dx = 0. \quad (3.32)$$

Ejemplo 3.34. Consideramos el siguiente caso especial de un problema de tipo Sturm–Liouville:

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda y(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) &= 0, & y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\lambda \leq 0$ la única solución de este problema es la trivial $y \equiv 0$. Tenemos entonces que $\lambda > 0$. En este caso la solución general de la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$ está dada por

$$y(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

La condición de frontera $y(0) = 0$ implica que $\alpha = 0$. Tenemos ahora, utilizando que $y'(1) = 0$, que $c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0$. Para que y no sea idénticamente cero, es necesario que $\beta \neq 0$, lo que implica que $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, es decir $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{2}$ donde k es entero positivo impar. De aquí que los autovalores en este problema de frontera son:

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las auto-funciones correspondientes son

$$y_n(x) = \beta_n \sin \left[\left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Es conveniente seleccionar los β_n 's de modo que $\int_0^1 y_n^2(x) dx = 1$. Usando que

$$\int \sin^2(u) du = \frac{1}{2}(u - \sin(u) \cos(u)),$$

obtenemos que $\beta_n = \sqrt{2}$, por lo que las auto-funciones quedan ahora dadas por:

$$y_n(x) = \sqrt{2} \sin \left[\left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

□

Sean (y_j) las auto-funciones del problema (3.31) donde suponemos que

$$\int_a^b r(x) y_j^2(x) dx = 1, \quad \forall j. \quad (3.33)$$

Dada una función f en $[a, b]$, nos interesa determinar cuando es posible expresar a f en términos de una serie usando los (y_j) . En particular, nos interesa determinar si existen números a_1, a_2, \dots tal que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.34)$$

Utilizando (3.32) y (3.33), es fácil ver que para que f tenga una representación como esta, es necesario que

$$a_j = \int_a^b r(x) f(x) y_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Para dar una contestación a la pregunta de cuando la representación (3.34) es posible, necesitamos el siguiente concepto.

Definición 3.35. Decimos que una función f tiene una *discontinuidad simple* en x_0 si

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

ambos existen como números reales y $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. La función f es *continua por pedazos* en $[a, b]$ si es continua en $[a, b]$ excepto por un número finito de discontinuidades simples en (a, b) .

Tenemos ahora el siguiente resultado sobre la convergencia de la serie (3.34).

Teorema 3.36. Sean (y_j) las auto-funciones del problema (3.31) y que satisfacen (3.33). Suponga que f y f' son funciones continuas por pedazos en el intervalo $[a, b]$. Entonces para cualquier $x_0 \in (a, b)$, la serie (3.34) con los coeficientes (3.35) converge a $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$. En particular, si f es continua en x_0 , entonces la serie (3.34) converge a $f(x_0)$.

Ejemplo 3.37. Para el problema de frontera del Ejemplo 3.34, utilizamos la función $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$. Tenemos entonces que los coeficientes (3.35) en este caso son:

$$a_j = \int_0^1 \sqrt{2} \sin \left[\left(\frac{2j-1}{2} \right) \pi x \right] dx = \frac{2\sqrt{2}}{(2j-1)\pi}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Como f es continua en $[0, 1]$, el teorema anterior nos garantiza que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin \left[\left(\frac{2j-1}{2} \right) \pi x \right], \quad x \in (0, 1).$$

Note que para $x = 0$ la serie es idénticamente cero por lo que no converge a $f(0)$. En $x = 1$, la serie de la derecha reduce a

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j-1}.$$

El resultado de que el valor de esta serie es igual a 1, fue descubierto por Leibniz cerca del año 1676. Así que para $x = 1$, la serie converge a $f(1)$. \square

3.6 Funciones de Green

Utilizando la solución particular (3.21), tenemos que la solución del PVI

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0, \end{cases} \quad (3.36)$$

está dada por:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{\infty} g(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.37)$$

donde

$$g(x, \xi) = \begin{cases} 0 & , \quad x_0 \leq x < \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{W[y_1, y_2](\xi)} & , \quad \xi < x. \end{cases}$$

Las constantes c_1 y c_2 se ajustan de modo que y cumpla con las condiciones iniciales en el PVI (3.36). La función $g(\cdot, \cdot)$ es un ejemplo de una *función de*

Green, en este caso para un problema de valor inicial. Si $\{y_0, v_0, f\}$ representa los *datos* en el PVI (3.36), entonces (3.37) no dá la solución de (3.36) explícitamente en términos de los datos del PVI. Es fácil verificar que $g(\cdot, \cdot)$ satisface lo siguiente:

1. $\frac{d^2g}{dx^2}(x, \xi) + p(x)\frac{dg}{dx}(x, \xi) + q(x)g(x, \xi) = 0$ para $x_0 < x < \xi$, $\xi < x$.
2. $g(x_0, \xi) = 0$, $\frac{dg}{dx}(x_0, \xi) = 0$.
3. $g(\cdot, \xi)$ es continua en $x = \xi$.
4. $\frac{dg}{dx}(x, \xi) \Big|_{x=\xi^+} - \frac{dg}{dx}(x, \xi) \Big|_{x=\xi^-} = 1$.

Las funciones de Green se pueden también introducir o motivar utilizando funciones de tipo impulso. (Vea la Sección 6.3.) Para una discusión relacionada a esto, así como para más detalles sobre los conceptos discutidos en esta sección, referimos al lector a [5], [12].

Consideramos ahora el siguiente problema de frontera:

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ a_1y(a) + a_2y'(a) = \alpha, & b_1y(b) + b_2y'(b) = \beta. \end{cases} \quad (3.38)$$

Motivado en parte por la discusión anterior, vamos ahora a discutir las funciones de Green para este tipo de problema.

Definición 3.38. Una función $g(x, \xi)$, donde $a \leq x, \xi \leq b$, es una función de Green para el problema de frontera (3.38) si g cumple con las siguientes condiciones:

1. $-\frac{d}{dx} \left(p(x)\frac{dg}{dx}(x, \xi) \right) + q(x)g(x, \xi) = 0$ para $a < x < \xi$, $\xi < x < b$.
2. $a_1g(a, \xi) + a_2\frac{dg}{dx}(a, \xi) = 0$, $b_1g(b, \xi) + b_2\frac{dg}{dx}(b, \xi) = 0$.
3. $g(\cdot, \xi)$ es continua en $x = \xi$.
4. $\frac{dg}{dx}(x, \xi) \Big|_{x=\xi^+} - \frac{dg}{dx}(x, \xi) \Big|_{x=\xi^-} = -\frac{1}{p(\xi)}$.

Se puede verificar que si $y \equiv 0$ es la única solución del problema (3.38) con los datos $\alpha = 0$, $\beta = 0$, y $f \equiv 0$, entonces la función de Green $g(\cdot, \cdot)$ para el problema (3.38), existe y es única. En adición, la solución del problema de frontera (3.38) está dada por:

$$y(x) = u(x) + \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.39)$$

donde u es la solución de (3.38) con $f \equiv 0$.

Ejemplo 3.39. Considere el problema de frontera

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' = f(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = \alpha, & y(1) = \beta, \end{cases}$$

donde k es continua con $k(x) > 0$ en $[0, 1]$. Como la solución general de $-(k(x)y'(x))' = 0$ es $y(x) = AK(x) + B$, donde

$$K(x) = \int_0^x \frac{dt}{k(t)},$$

tenemos que la función de Green para este problema tiene la forma:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} A_1 K(x) + B_1 & , \quad x < \xi, \\ A_2 K(x) + B_2 & , \quad x > \xi. \end{cases}$$

Las condiciones de frontera $g(0, \xi) = 0$ y $g(1, \xi) = 0$ implican que $B_1 = 0$ y que $B_2 = -A_2 K(1)$. Finalmente utilizando la condición de continuidad en $x = \xi$ y la condición de *brinco*:

$$\left. \frac{dg}{dx}(x, \xi) \right|_{x=\xi^+} - \left. \frac{dg}{dx}(x, \xi) \right|_{x=\xi^-} = -\frac{1}{k(\xi)},$$

obtenemos que

$$A_1 = 1 - \frac{K(\xi)}{K(1)}, \quad A_2 = -\frac{K(\xi)}{K(1)},$$

por lo que

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{K(\xi)}{K(1)}\right) K(x) & , \quad x < \xi, \\ -\frac{K(\xi)}{K(1)} (K(x) - K(1)) & , \quad x > \xi. \end{cases}$$

Usando que la solución general de $-(k(x)y'(x))' = 0$ es $y(x) = AK(x) + B$, tenemos que la solución del problema de frontera con $f \equiv 0$ esta dada por

$$u(x) = \left[\frac{\beta - \alpha}{K(1)} \right] K(x) + \alpha.$$

Tenemos entonces que la solución del problema de frontera original está dada por:

$$y(x) = \left[\frac{\beta - \alpha}{K(1)} \right] K(x) + \alpha + \int_0^1 g(x, \xi) d\xi.$$

□

Ejemplo 3.40. Considere el problema de frontera

$$\begin{cases} -y''(x) + y(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ y'(0) = \alpha, & y'(1) = \beta, \end{cases}$$

La solución general de $-y''(x) + y(x) = 0$ es $Ae^x + Be^{-x}$ por lo que la función de Green para este problema tiene la forma:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} A_1 e^x + B_1 e^{-x} & , \quad x < \xi, \\ A_2 e^x + B_2 e^{-x} & , \quad x > \xi. \end{cases}$$

Las condiciones de frontera $g_x(0, \xi) = 0$ y $g_x(1, \xi) = 0$ implican que $B_1 = A_1$ y que $B_2 = e^2 A_2$. La continuidad de $g(\cdot, \xi)$ en $x = \xi$ y la condición de brinco

$$\left. \frac{dg}{dx}(x, \xi) \right|_{x=\xi^+} - \left. \frac{dg}{dx}(x, \xi) \right|_{x=\xi^-} = -1,$$

implican que

$$A_1 = \frac{e^\xi + e^{2-\xi}}{2(e^2 - 1)}, \quad A_2 = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2(e^2 - 1)}.$$

Tenemos entonces que

$$g(x, \xi) = \frac{1}{e^2 - 1} \begin{cases} (e^\xi + e^{2-\xi}) \cosh(x) & , \quad x < \xi, \\ \cosh(\xi)(e^x + e^{2-x}) & , \quad x > \xi. \end{cases}$$

Usando que la solución general de $-y''(x) + y(x) = 0$ es $Ae^x + Be^{-x}$, es fácil ver que

$$u(x) = \frac{1}{e^2 - 1} [(\beta e - \alpha)e^x + e(\beta - \alpha e)e^{-x}],$$

es solución del problema de frontera con $f \equiv 0$. La solución del problema de frontera original esta dada entonces por:

$$y(x) = \frac{1}{e^2 - 1} [(\beta e - \alpha)e^x + e(\beta - \alpha)e^{-x}] + \int_0^1 g(x, \xi)f(\xi) d\xi.$$

En el caso especial en que $\alpha = 0$, $\beta = 0$, y

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 g(x, \xi)f(\xi) d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x, \xi)\xi d\xi, \\ &= \frac{1}{e^2 - 1} \begin{cases} (e^x + e^{2-x}) \int_0^x \xi \cosh(\xi) d\xi \\ \quad + \cosh(x) \int_x^{\frac{1}{2}} \xi(e^\xi + e^{2-\xi}) d\xi, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (e^x + e^{2-x}) \int_0^{\frac{1}{2}} \xi \cosh(\xi) d\xi, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Usando las formulas:

$$\begin{aligned} \int \xi \cosh(\xi) d\xi &= \xi \sinh(\xi) - \cosh(\xi), \\ \int \xi(e^\xi + e^{2-\xi}) d\xi &= (\xi - 1)e^\xi - (\xi + 1)e^{2-\xi}, \end{aligned}$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e^2 - 1} \left[(e^x + e^{2-x})(x \sinh(x) - \cosh(x) + 1) \right. \\ &\quad \left. - \cosh(x) \left(\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} + 3e^{\frac{3}{2}}) + (x - 1)e^x - (x + 1)e^{2-x} \right) \right], \end{aligned}$$

para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, y que

$$y(x) = \frac{1}{e^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \sinh\left(\frac{1}{2}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \right) (e^x + e^{2-x}),$$

para $\frac{1}{2} < x \leq 1$. □

Las funciones de Green también se pueden construir utilizando las auto-funciones del operador de Sturm asociado al problema de frontera (3.38). Sean (y_j) las auto-funciones del problema de frontera (3.30)-(3.31), donde suponemos que $r \equiv 1$, que $\lambda = 0$ no es un autovalor para este problema, y que las auto-funciones satisfacen la condición de normalización (3.33). Entonces si multiplicamos la ecuación diferencial en (3.38) por y_j , integramos de $x = a$ a $x = b$ la ecuación resultante, e integramos por partes dos veces, llegamos a que

$$p(x)[y(x)y_j'(x) - y_j(x)y'(x)]\Big|_{x=a}^{x=b} + \lambda_j \int_a^b y(\xi)y_j(\xi) d\xi = \int_a^b f(\xi)y_j(\xi) d\xi.$$

Es fácil ver ahora que si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ en (3.38), entonces

$$p(x)[y(x)y_j'(x) - y_j(x)y'(x)]\Big|_{x=a}^{x=b} = 0,$$

por lo que

$$\int_a^b y(\xi)y_j(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b f(\xi)y_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots$$

Usando el Teorema 3.36 tenemos que

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_j} \int_a^b f(\xi)y_j(\xi) d\xi \right] y_j(x) = \int_a^b g(x, \xi)f(\xi) d\xi,$$

donde

$$g(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} y_j(x)y_j(\xi).$$

3.7 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcule las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''(x) + x [y'(x)]^2 = 0,$$

para los casos $c_1 = 0$ ó $c_1 < 0$ del Ejemplo 3.2.

Ejercicio 3.2. Verifique que $\{y_1(x) = \sqrt{x}, \quad y_2(x) = x^{-1}\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación:

$$2x^2y''(x) + 3xy'(x) - y(x) = 0,$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

Ejercicio 3.3. Verifique que la función $y_1(x)$ dada es solución de la ecuación diferencial dada. Usando ésto encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

a) $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x.$

b) $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1(x) = x^2.$

c) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad y_1(x) = x.$

Ejercicio 3.4. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0.$

b) $2y'' - 4y' + 8y = 0.$

c) $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 0.$

d) $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0.$

Ejercicio 3.5. Halle la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

a) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$

b) $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

c) $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$

Ejercicio 3.6. Para la ecuación diferencial:

$$y'' + 6y' + 13y = x^2e^{-3x} \cos(2x) + 2xe^{4x},$$

escriba la forma general para una solución particular de la misma. No tiene que buscar los coeficientes que aparecen en la solución particular.

Ejercicio 3.7. Halle una solución particular de para las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas.

- a) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^x$.
- b) $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = x \cos(x)$.
- c) $y'' - 3y' + 2y = 14 \sin(2x) - 18 \cos(2x)$.
- d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln(x)$.

Ejercicio 3.8. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas.

- a) $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 3xe^{2x}$.
- b) $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 2x - 3$.

Ejercicio 3.9. Verifique que la única solución de la ecuación

$$y''(x) + xy'(x) + (1 + x^2)y^2(x) = 0,$$

que es tangente al eje de “ x ” en algún punto $(x_0, 0)$, es $y = 0$.

Ejercicio 3.10. Considere la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ donde p, q son funciones continuas en $[a, b]$.

- a) ¿Podría $y = \sin(x^2)$ ser una solución de esta ecuación en algún intervalo $[a, b]$ que contenga $x = 0$? Explique.
- b) Sean y_1, y_2 soluciones tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$. Verifique que $\{y_1, y_2\}$ no puede ser un conjunto fundamental de la ecuación diferencial.

Ejercicio 3.11. Verifique que si $y_1, y_2 \in C^2(\alpha, \beta)$ son soluciones de la ecuación homogénea (3.6), entonces el wronskiano (3.9) como función de x , satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dx}(x) = -p(x)W(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Deduzca de aquí que

$$W(x) = Ke^{-\int p(x) dx}.$$

Use esto para completar una demostración del Lema 3.9.

Ejercicio 3.12. Considere la ecuación:

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 0.$$

- Determine los valores de r para los cuales la ecuación tiene soluciones de la forma $y(x) = x^r$.
- Verifique que las soluciones obtenidas en la parte anterior forman un conjunto fundamental de la ecuación en el intervalo $(0, \infty)$.

Ejercicio 3.13. Usando las técnicas discutidas en la Sección 3.2.4, verifique que

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \quad \tan \delta = \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

es solución particular de (3.27).

Ejercicio 3.14. Una masa que pesa 4 libras alarga un resorte 1/8 pies. El sistema masa–resorte se somete a una fuerza externa de $4 \sin \omega t$ libras. Si la masa se desplaza 2 pulgadas de la posición de equilibrio y luego se suelta, halle:

- La ecuación diferencial del movimiento y las condiciones iniciales del sistema. Resuelva el PVI resultante.
- ¿Para que valor de ω el sistema experimentará resonancia?

Ejercicio 3.15. Una masa que pesa 6 libras alarga un resorte 1/3 pies. El sistema masa–resorte se somete a una fuerza externa de $-5 \sin \omega t$ libras. Si la masa se desplaza 3 pulgadas hacia arriba de la posición de equilibrio y luego se suelta, halle:

- La ecuación diferencial del movimiento (**no la resuelva**) y las condiciones iniciales del sistema, suponiendo que no hay fricción.
- ¿Para que valor de ω el sistema experimentará resonancia?
- Si el sistema masa–resorte se pone en un medio que ofrece una resistencia igual a dos veces el negativo de la velocidad instantánea, calcule el pseudo periodo del sistema.

Ejercicio 3.16. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y^{(4)}(x) - 8y^{(3)}(x) + 16y''(x) = 0$.

b) $y^{(3)}(x) - 8y(x) = 0$.

c) $y^{(4)}(x) - 3y^{(3)}(x) + 3y''(x) - y'(x) = 0$.

d) $y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0$.

e) $9y^{(3)}(x) + 12y''(x) + 4y'(x) = 0$.

f) $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 26y'' - 40y' + 25y = 0$, dado que

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 26\lambda^2 - 40\lambda + 25 = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2.$$

Ejercicio 3.17. Determine los autovalores y auto-funciones para los siguientes problemas de frontera de tipo Sturm–Liouville:

a) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $y(0) - y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

b) $-(x^2 y'(x))' + y(x) = \lambda y(x)$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$.

Ayuda: Puede suponer que $5 - 4\lambda < 0$. Busque soluciones de la ecuación diferencial dada que sean de la forma x^α . Vea la Sección 5.3.1.

Ejercicio 3.18. Utilizando las auto-funciones del problema de frontera en el Ejemplo 3.34, halle las series de Sturm–Liouville correspondientes (cf. (3.34)–(3.35)) para las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$ para $x \in [0, 1]$.

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Ejercicio 3.19. Considere el siguiente problema de frontera:

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4} & , \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} & , \quad \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Encuentre la función de Green para este problema y calcule explícitamente la solución del mismo utilizando la función de Green.

Ejercicio 3.20. Considere el problema de frontera

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' = f(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = \alpha, & y'(1) = \beta, \end{cases}$$

donde k es continua con $k(x) > 0$ en $[0, 1]$. Encuentre la función de Green para este problema y halle una representación para la solución del mismo utilizando la función de Green.

Capítulo 4

Sistemas Autónomos 2×2

La mayoría de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias son en la forma de sistemas de ecuaciones, esto es, hay más de una función desconocida relacionadas por varias ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, el movimiento de un satélite alrededor de la tierra, está dado por una ecuación diferencial donde la función desconocida, que es la posición en el espacio del satélite, es un vector de tres componentes.

En este capítulo vamos a estudiar sistemas de ecuaciones autónomos de dos ecuaciones en dos desconocidas (2×2), y de primer orden. Como en el caso de la ecuación escalar de primer orden considerado en la Sección (2.1.2), el objetivo principal será el de obtener la mayor cantidad posible de información sobre las soluciones del sistema sin resolver directamente el sistema. En particular nos interesa estudiar la *estabilidad* del sistema, o sea, cuán susceptible es la solución del sistema a cambios en las condiciones iniciales. Aunque nos concentraremos en el caso 2×2 , muchas de las ideas y conceptos discutidos en este contexto se pueden generalizar al caso de n ecuaciones en n desconocidas con $n > 2$.

4.1 Definiciones y resultados básicos

Vamos a estudiar sistemas de ecuaciones autónomas de la forma

$$x'(t) = F(x(t), y(t)), \quad y'(t) = G(x(t), y(t)), \quad (4.1)$$

donde F, G son funciones C^2 en una región D del plano. Por el teorema de existencia y unicidad, dado $(x_0, y_0) \in D$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe una curva

$(x(\cdot), y(\cdot))$ que es solución de (4.1), satisface que $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, y ésta curva es única.

Ejemplo 4.1. Considere la ecuación escalar de orden dos

$$\theta''(t) + \theta^2(t) = 0.$$

Con la sustitución

$$x(t) = \theta(t), \quad y(t) = \theta'(t),$$

ésta ecuación es equivalente al sistema autónomo:

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x^2(t).$$

Este sistema es de la forma (4.1) donde $F(x, y) = y$ y $G(x, y) = -x^2$. \square

Ejemplo 4.2. Lotka y Volterra (1925) propusieron un modelo para estudiar las poblaciones de dos especies que interactúan una con la otra de modo que una (los depredadores) se *alimenta* de la otra (las presas). Algunos ejemplos de este tipo de poblaciones serían tiburones y peses, o zorros y conejos, etc. El modelo propuesto por Lotka y Volterra está dado por el siguiente sistema ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) && - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= && - cy(t) + dx(t)y(t), \end{aligned}$$

donde $x(t), y(t)$ son las poblaciones de presas y depredadores respectivamente en tiempo t , y a, b, c, d son parámetros positivos que caracterizan a las poblaciones. Este sistema es de la forma (4.1) donde $F(x, y) = ax - bxy$ y $G(x, y) = -cy + dxy$. Más adelante en este capítulo estudiaremos éste sistema en más detalles. \square

Note que cualquier solución $(x(\cdot), y(\cdot))$ del sistema (4.1) describe una *curva* en el plano xy . A ésta curva se le llama *trayectoria*, *órbita*, o *paso* y $(x(\cdot), y(\cdot))$ es su representación paramétrica. Al plano xy en este contexto se le refiere como el *plano fase*.

Los sistemas autónomos tienen la siguiente propiedad bien importante:

Proposición 4.3. *Si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema autónomo para toda t , entonces para cualquier número δ , $(x(t - \delta), y(t - \delta))$ es solución del sistema para toda t . En particular, por cada punto (x_0, y_0) del plano fase pasa una sola trayectoria.*

Demostración: Sean $\hat{x}(t) = x(t - \delta)$, $\hat{y}(t) = y(t - \delta)$. Usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\hat{x}'(t) = x'(t - \delta) = F(x(t - \delta), y(t - \delta)) = F(\hat{x}(t), \hat{y}(t)),$$

ya que $(x(\cdot), y(\cdot))$ es una solución del sistema. (Note que aquí es donde se utiliza que F es independiente de t .) De igual forma se obtiene que

$$\hat{y}'(t) = G(\hat{x}(t), \hat{y}(t)),$$

esto es $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot))$ es también solución.

Para la segunda parte, sean $(x(\cdot), y(\cdot))$, $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot))$ soluciones del sistema tal que

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0), \quad (\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{y}(\hat{t}_0)) = (x_0, y_0).$$

Sea $(\phi(t), \psi(t)) = (x(t - \hat{t}_0 + t_0), y(t - \hat{t}_0 + t_0))$. Por la demostración de arriba, tenemos que $(\phi(\cdot), \psi(\cdot))$ es solución del sistema. Además

$$(\phi(\hat{t}_0), \psi(\hat{t}_0)) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0).$$

Por el teorema de existencia y unicidad

$$(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) = (\phi(t), \psi(t)) = (x(t - \hat{t}_0 + t_0), y(t - \hat{t}_0 + t_0)),$$

es decir, $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot))$, $(x(\cdot), y(\cdot))$ describen la misma trayectoria en el plano la cuál contiene el punto (x_0, y_0) . \square

Ejemplo 4.4. Considere el sistema

$$x'(t) = -y, \quad y'(t) = x.$$

Este sistema es equivalente a la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x}{y}.$$

Esta ecuación es separable con solución general

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0.$$

De modo que las trayectorias del sistema forman una familia de círculos con centro en el origen. Note que si $x, y > 0$, entonces $x'(t) < 0$ y $y'(t) > 0$ por lo que las trayectorias se recorren en la dirección en contra de las manecillas del reloj (Figura (4.1)). \square

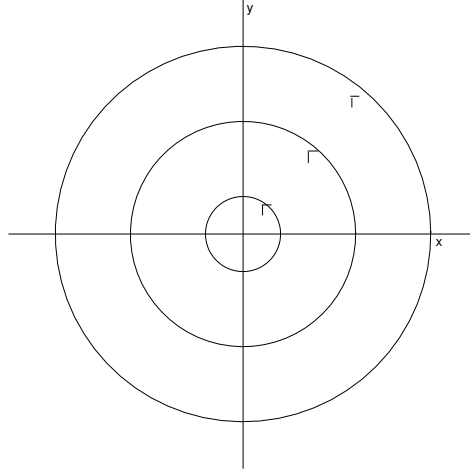


Figura 4.1: Trayectorias para el sistema del Ejemplo (4.4).

Definición 4.5. Una solución $(x(\cdot), y(\cdot))$ del sistema (4.1) se llama *periódica con periodo T* , si para algún $T \neq 0$,

$$x(t + T) = x(t), \quad y(t + T) = y(t), \quad \forall t,$$

y T es el valor mínimo con esta propiedad.

Note que la trayectoria de una solución periódica corresponde a una curva cerrada en el plano fase. De modo que en el ejemplo anterior las soluciones son periódicas y se puede verificar que el periodo es 2π . Tenemos también que:

Proposición 4.6. *Toda trayectoria que es una curva cerrada en el plano fase corresponde a una solución periódica de (4.1).*

Demostración: Sea $(x(t), y(t))$ una parametrización de la trayectoria cerrada. Sea (x_0, y_0) un punto de la trayectoria tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Como la trayectoria es cerrada, existe un $\hat{t}_0 > t_0$ tal que $(x(\hat{t}_0), y(\hat{t}_0)) = (x_0, y_0)$. Sea $T = \hat{t}_0 - t_0$ y defina

$$\hat{x}(t) = x(t + T), \quad \hat{y}(t) = y(t + T), \quad \forall t.$$

Por la Proposición (4.3), $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ es solución del sistema (4.1) con

$$(\hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) = (x(\hat{t}_0), y(\hat{t}_0)) = (x_0, y_0).$$

Por el teorema de existencia y unicidad, podemos concluir que

$$\hat{x}(t) = x(t), \quad \hat{y}(t) = y(t), \quad \forall t,$$

i.e.,

$$x(t + T) = x(t), \quad y(t + T) = y(t), \quad \forall t.$$

□

Hay dos métodos para obtener las trayectorias en el plano fase del sistema (4.1). Uno de ellos, el cuál fue utilizado en el ejemplo anterior, consiste en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (4.2)$$

La solución de ésta ecuación diferencial de primer orden está dada por una familia de soluciones que representan las trayectorias del sistema (4.1) parametrizadas por un solo parámetro.

El otro método para buscar las trayectorias consiste en hallar la solución $(x(t), y(t))$ del sistema y luego “eliminar” la “ t ” de las ecuaciones.

Ejemplo 4.7. Para el sistema del Ejemplo (4.4) note que

$$y''(t) = x'(t) = -y(t),$$

i.e., $y'' + y = 0$. Así que

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t = c \sin(t - \delta),$$

para algunos $c, \delta \in \mathbb{R}$. Tenemos ahora que

$$x(t) = y'(t) = c \cos(t - \delta).$$

Podemos eliminar la “ t ” sumando los cuadrados de x, y :

$$x^2 + y^2 = c^2(\sin^2(t - \delta) + \cos^2(t - \delta)) = c^2,$$

i.e., las trayectorias son círculos con centro en el origen. □

Uno de los objetivos principales de este capítulo es estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema (4.1) alrededor o cerca de los llamados *puntos críticos*.

Definición 4.8. Un punto (x_0, y_0) es un *punto crítico o de equilibrio* del sistema (4.1) si

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0.$$

Ejemplo 4.9. Considere el sistema de ecuaciones

$$x'(t) = x(t) + y^2(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t).$$

Los puntos críticos de este sistema están dados por las soluciones de

$$x + y^2 = 0, \quad x + y = 0.$$

Como $y = -x$, la primera de éstas ecuaciones reduce a $x + x^2 = 0$, que tiene soluciones $x = 0, -1$. Usando nuevamente que $y = -x$ obtenemos que los puntos críticos de éste sistema son $(0, 0)$, $(-1, 1)$. \square

Note que si (x_0, y_0) es un punto crítico, entonces

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0, \quad \forall t,$$

es solución de (4.1), i.e., el punto crítico corresponde a la trayectoria de la solución constante dada arriba.

Definición 4.10. Una trayectoria $(x(t), y(t))$ del sistema (4.1) se dice que *tiende o se acerca* al punto crítico (x_0, y_0) según $t \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0.$$

Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad de soluciones de (4.1) y de la observación anterior sobre los puntos críticos como soluciones constantes en “t” del sistema (4.1), tenemos que

Proposición 4.11. *Toda trayectoria de (4.1) que pase o contenga un punto del plano fase que no es un punto crítico, no puede alcanzar un punto crítico en un tiempo finito.*

Al estudiar el sistema (4.1) nos interesa determinar el tipo de estabilidad de los puntos críticos. Aquí nos referimos a si perturbaciones pequeñas del punto crítico inducen o no soluciones que se mantengan cerca del punto crítico.

Definición 4.12. El punto crítico (x_0, y_0) del sistema (4.1) se llama *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si (\bar{x}, \bar{y}) es un punto del plano fase con $(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2 < \delta^2$ y si $(x(t), y(t))$ es la trayectoria que pasa por (\bar{x}, \bar{y}) cuándo $t = \bar{t}$, entonces

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 < \varepsilon^2, \quad t \geq \bar{t}.$$

De lo contrario decimos que el punto crítico es *inestable*.

Esto es, el punto crítico es estable si las trayectorias que empiezan o pasan cerca del punto crítico, se mantienen cerca de éste para todo tiempo sucesivo. Si en adición requerimos que las trayectorias tiendan al punto crítico, tenemos:

Definición 4.13. El punto crítico (x_0, y_0) del sistema (4.1) se llama *asintóticamente estable* si existe un $\delta > 0$ tal que si (\bar{x}, \bar{y}) es un punto del plano fase con $(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2 < \delta^2$ y si $(x(t), y(t))$ es la trayectoria que pasa por (\bar{x}, \bar{y}) , entonces $(x(t), y(t))$ tiende a (x_0, y_0) según $t \rightarrow \infty$.

Note que un punto crítico asintóticamente estable es también estable, pero lo inverso no es cierto en general.

4.2 El Plano Fase – Sistemas Lineales

Si (x_0, y_0) es punto crítico del sistema (4.1), entonces suponiendo que $F, G \in C^2$, podemos usar el Teorema de Taylor para escribir que¹:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \\ G(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \end{aligned}$$

¹Una función $f(x)$ se dice que es $O(g(x))$ según $x \rightarrow x_0$ si existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq Cg(x)$ para x suficiente cerca de x_0 .

según $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Si (x, y) está cerca del punto (x_0, y_0) , entonces podemos aproximar el sistema (4.1) con el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

El sistema (4.3) se llama la *linearización del sistema* (4.1) *alrededor del punto crítico* (x_0, y_0) . Nos interesa contestar la siguiente pregunta: ¿cuán bien representan o aproximan las soluciones de (4.3) a las del sistema original (4.1)?

Ejemplo 4.14. En el Ejemplo 4.9 vimos que el sistema autónomo

$$x'(t) = x(t) + y^2(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t). \quad (4.4)$$

tiene puntos críticos $(0, 0)$, $(-1, 1)$. En este caso tenemos que $F(x, y) = x + y^2$, $G(x, y) = x + y$ por lo que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando esto tenemos que para el punto crítico $(x_0, y_0) = (0, 0)$, la linearización de (4.4) alrededor de $(0, 0)$ es:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t) + y(t) \end{pmatrix}.$$

Para el punto crítico $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, la linearización de (4.4) alrededor de $(-1, 1)$ es:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) + 1 \\ y(t) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) + 1 + 2(y(t) - 1) \\ x(t) + 1 + y(t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Con el cambio de variables $u = x + 1$, $v = y - 1$, el sistema anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) + 2v(t) \\ u(t) + v(t) \end{pmatrix}.$$

El cambio de variables $u = x + 1$, $v = y - 1$ traslada el punto $(-1, 1)$ en xy al punto $(0, 0)$ en uv . Es por esto que es suficiente al desarrollar la teoría de estabilidad de puntos críticos para sistemas lineales, suponer que el origen es el único punto crítico. \square

Es costumbre en el cambio de variables mencionado al final del ejemplo anterior, seguir llamando a las variables nuevas xy en lugar de uv . Esto es, con el cambio de variables $x \leftrightarrow x - x_0$, $y \leftrightarrow y - y_0$ en el sistema (4.3), tenemos que es suficiente considerar el caso en que el punto crítico es el origen. Por tal razón vamos a estudiar el problema de caracterizar el plano fase del sistema lineal 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde por el momento suponemos que

$$ad - bc \neq 0. \quad (4.6)$$

Imitando el caso de la ecuación escalar de orden dos con coeficientes constantes (Sección 3.2.2, página 63), buscamos soluciones de (4.5) de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ son constantes por determinarse, y donde se requiere que v_1, v_2 no sean ambas cero. Sustituyendo en (4.5) y simplificando encontramos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Esto es, λ es un *valor propio* de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t$ es un *vector propio* asociado a λ . Note que la ecuación (4.7) se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Tenemos entonces que los valores propios de la matriz A , que corresponden a vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t \neq (0, 0)^t$, son la raíces del *polinomio característico*:

$$p_A(\lambda) \equiv \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc, \quad (4.9)$$

las cuáles denotamos por λ_1, λ_2 .

Ejemplo 4.15. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda).$$

Así que los autovalores de A son $\lambda = 1, 2$.

Para $\lambda = 1$:

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema (4.8) queda ahora como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene solución $v_1 = \alpha, v_2 = 0$ donde α puede asumir cualquier valor distinto de cero. Tomando $\alpha = 1$ tenemos que un autovector asociado a $\lambda = 1$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De igual forma, para el autovalor $\lambda = 2$:

$$A - \lambda I = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cumplen con $v_1 = v_2$ donde $v_1 \neq 0$. Tomando $v_1 = 1$ tenemos que un autovector asociado a $\lambda = 2$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos ahora que

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son soluciones del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

y la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

En la Sección 9.4 se discute en más detalles la teoría de los sistemas lineales con coeficientes constantes, en particular para el caso $n \times n$. \square

Volvemos ahora a considerar el sistema (4.5). El carácter o tipo de diagrama de fase de éste sistema, depende de la estructura algebraica de las raíces λ_1, λ_2 del polinomio (4.9) y los autovectores asociados.

4.2.1 Raíces reales distintas y del mismo signo

En este caso la matriz A tiene dos vectores propios linealmente independientes (que no son proporcionales) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y la solución general de (4.5) está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{12} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} v_{21} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

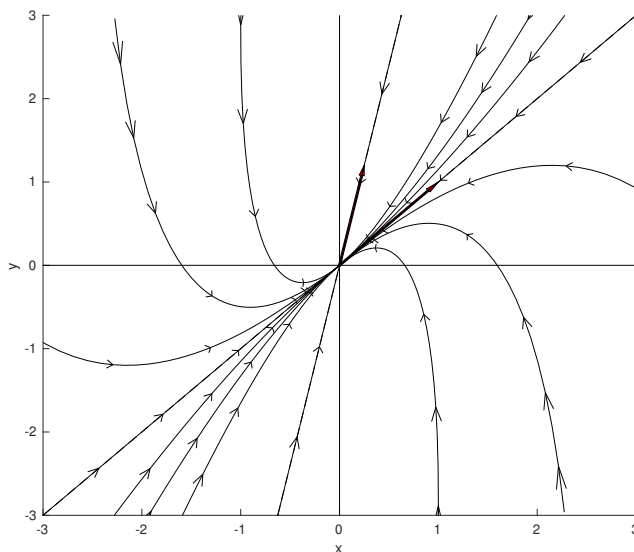


Figura 4.2: Plano fase cuándo los valores propios son reales, distintos, y negativos (nodo impropio).

donde $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, v_{2i})^t$, $i = 1, 2$. Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Tenemos pues que el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Suponiendo que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ y c_1, c_2 son ambos distintos de cero, entonces las soluciones “entran” al punto crítico tangentes a la recta con dirección \mathbf{v}_1 . Si $c_1 = 0$, pero $c_2 \neq 0$, entonces las soluciones entran por la recta que pasa por el punto crítico y con dirección \mathbf{v}_2 . Si $c_1 \neq 0$, pero $c_2 = 0$, entonces las soluciones entran por la recta que pasa por el punto crítico y con dirección \mathbf{v}_1 . En la Figura (4.2) resumimos estas observaciones en un diagrama para el plano fase en este caso. Si ambas raíces son positivas, el diagrama del plano fase es similar pero con las flechas saliendo del origen y se dice el punto crítico es *inestable*. En ambos casos decimos que el punto crítico es un *nodo impropio*.

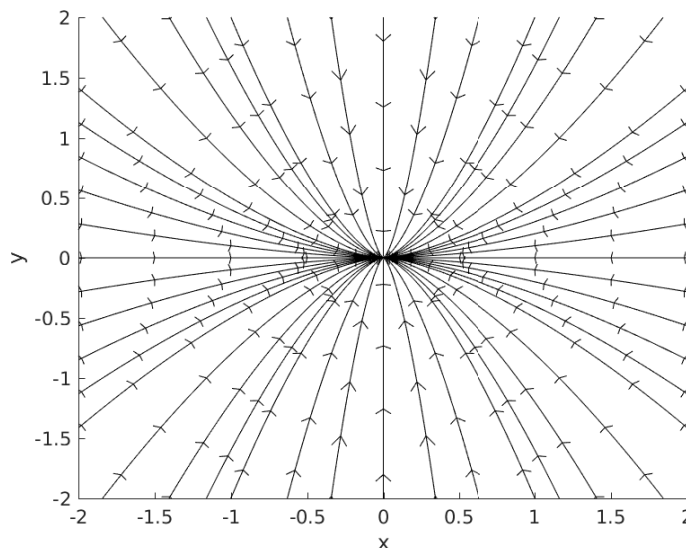


Figura 4.3: Plano fase del sistema del Ejemplo (4.16). El origen es un nodo impropio asintóticamente estable.

Ejemplo 4.16. Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

la matriz de coeficientes tiene los autovalores $\lambda = -2, -3$. De modo que el origen es un nodo impropio asintóticamente estable. En este caso podemos encontrar las trayectorias ya que éstas son las soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3y}{2x}.$$

Esta ecuación es separable con solución general:

$$|y| = c |x|^{\frac{3}{2}}.$$

Mostramos el diagrama de fase para este problema en la Figura (4.3). \square

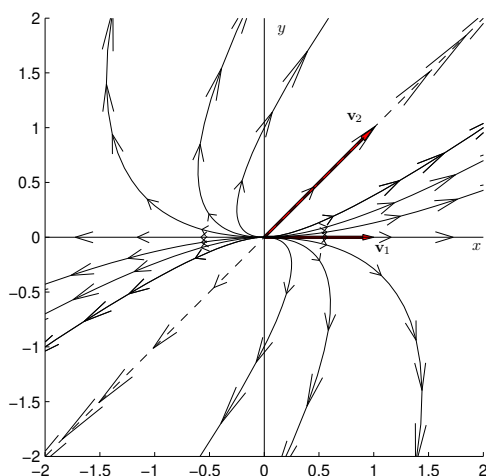


Figura 4.4: Plano fase del sistema del Ejemplo (4.17). El origen es un nodo impropio inestable.

Ejemplo 4.17. Un ejemplo un tanto más complicado es el del sistema del Ejemplo 4.15. Vimos que en este caso la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad y(t) = c_2 e^{2t}.$$

Si $c_2 = 0$ con $c_1 \neq 0$, entonces $y(t) = 0$ para todo t y $x(t) = c_1 e^t$ lo que representa una familia de trayectorias saliendo del punto crítico $(0, 0)$ a través del eje de x . Por otro lado, si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces $x(t) = y(t) = c_2 e^{2t}$ lo que representa una familia de trayectorias saliendo del punto crítico $(0, 0)$ a través de la recta $y = x$. En el caso más general en que $c_1 c_2 \neq 0$, entonces podemos eliminar la “ t ” de estas ecuaciones llegando a que

$$(x - y)^2 = cy, \quad c \neq 0,$$

donde c y y tienen el mismo signo. Un análisis ahora de esta ecuación junto con los dos casos especiales ($c_1 = 0$ ó $c_2 = 0$) nos lleva a que el diagrama de fase de este sistema es como se muestra en la Figura 4.4. \square

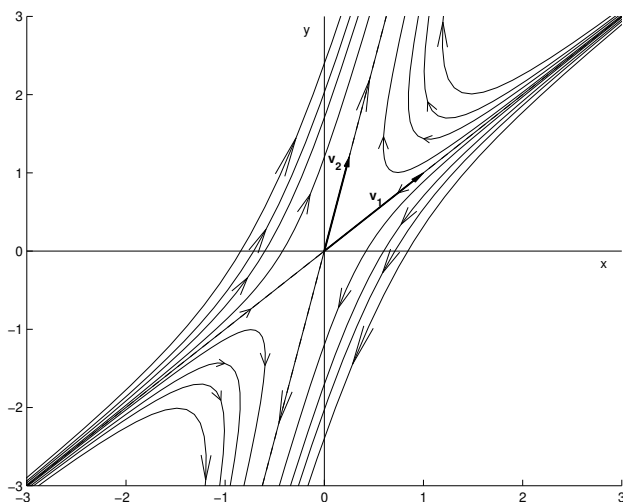


Figura 4.5: Plano fase cuándo los valores propios son reales con signos opuestos (silla de caballo).

4.2.2 Raíces reales con signos distintos

Supongamos que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Entonces la solución general tiene también la forma (4.10) pero ahora todas las soluciones cumplen que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty,$$

a menos que $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ en cuál caso $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ según $t \rightarrow \infty$ a través de la recta que pasa por el punto crítico en dirección de \mathbf{v}_1 . Si $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ entonces la solución tiende a infinito a lo largo de la recta que pasa por el punto crítico en dirección de \mathbf{v}_2 . Note que cuándo c_1, c_2 son ambos distintos de cero, el limite a infinito de arriba es asintótico a la recta que pasa por el punto crítico en dirección de \mathbf{v}_2 . Todas estas observaciones se resumen en el diagrama de fase de la Figura (4.5). En este caso decimos que el punto crítico es una *silla de caballo* y es inestable.

Ejemplo 4.18. Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

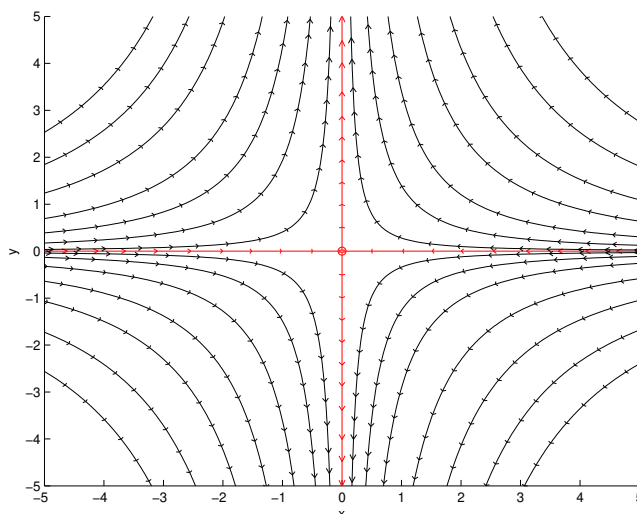


Figura 4.6: Plano fase del sistema del Ejemplo (4.18). El origen es una silla de caballo, por consiguiente inestable.

la matriz de coeficientes tiene los autovalores $\lambda = -2, 3$. De modo que el origen es una silla de caballo, por consiguiente inestable. En este caso podemos encontrar las trayectorias ya que éstas son las soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3y}{2x}.$$

Esta ecuación es separable con solución general:

$$|y| = \frac{c}{|x|^{\frac{3}{2}}}.$$

Mostramos el diagrama de fase para este problema en la Figura (4.6). \square

4.2.3 Raíces iguales

Suponga que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Veamos primero el caso en que la matriz de coeficientes es no-defectuosa. (Vea la Sección 9.4.3.) Tenemos pues que la matriz A tiene dos vectores propios linealmente independientes y la solución general del sistema está dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2).$$

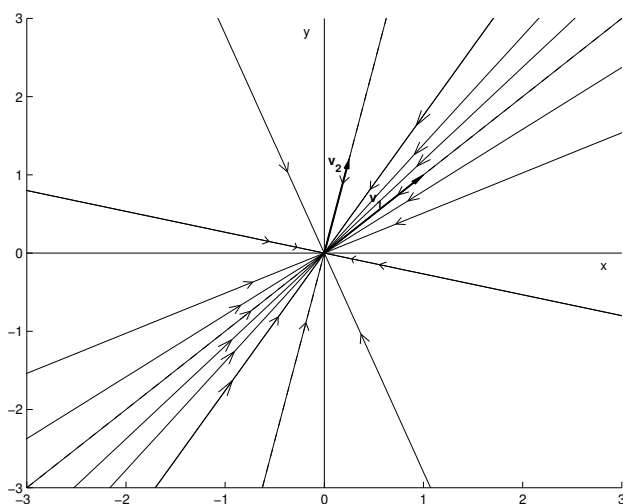


Figura 4.7: Plano fase cuándo los valores propios son iguales y negativos (nodo propio).

Si $\lambda < 0$, entonces $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ según $t \rightarrow \infty$ a través de la recta que pasa por el punto crítico en dirección de $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, éstas direcciones generan todo el plano de modo que el diagrama de fase es como se muestra en la Figura (4.7). Decimos que el punto crítico es un *nodo propio* y es (asintóticamente) estable. La situación cuándo $\lambda > 0$ es similar pero con las trayectorias saliendo del punto crítico el cuál es inestable en este caso.

Si A tiene un solo vector propio \mathbf{v} asociado a λ , entonces existe una cadena de vectores propios generalizados de largo dos $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ y la solución general del sistema es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Si $\lambda < 0$, entonces nuevamente $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ según $t \rightarrow \infty$ pero ahora el término $t e^{\lambda t} \mathbf{v}$ domina para “ t ” grande siempre que $c_2 \neq 0$ en cuál caso las soluciones entran al punto crítico tangentes a \mathbf{v} . Si $c_2 = 0$, entonces las soluciones entran al origen según $t \rightarrow \infty$ a través de la recta que pasa por el punto crítico en dirección de \mathbf{v} . El diagrama de fase se muestra en la Figura (4.8) y el punto crítico en este caso se llama *nodo impropio* y es asintóticamente estable. La situación cuándo $\lambda > 0$ es similar pero con las trayectorias saliendo del punto crítico el cuál es inestable.

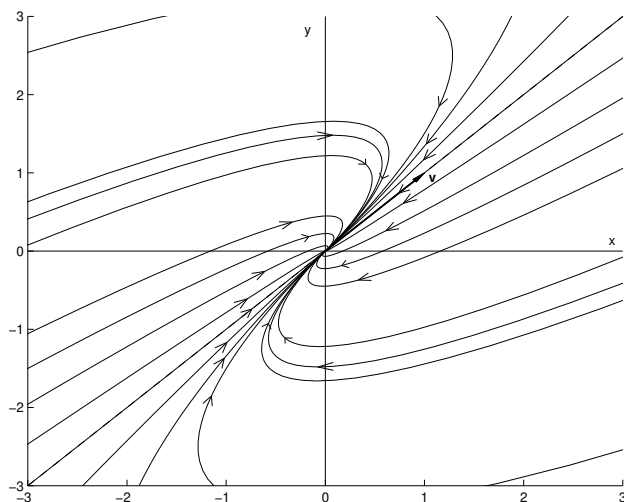


Figura 4.8: Plano fase cuándo los valores propios son iguales, negativos y la matriz es defectuosa (nodo impropio).

Ejemplo 4.19. Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

la matriz de coeficientes tiene el autovalor $\lambda = 2$ repetido. En este caso es fácil ver que $x(t) = c_1 e^{2t}$, $y(t) = c_2 e^{2t}$. Tenemos entonces que si $c_1 \neq 0$,

$$y = \frac{c_2}{c_1} x,$$

que es una familia de rectas correspondiente a trayectorias que emanan o salen del origen. Si $c_1 = 0$, entonces tenemos la trayectoria $(0, c_2 e^{2t})$ que corresponde al eje positivo de y si $c_2 > 0$, y al negativo si $c_2 < 0$. Como $\lambda = 2 > 0$, el origen es un nodo propio inestable. El diagrama de fase en este caso se muestra en la Figura (4.9).

Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

La matriz de coeficientes tiene nuevamente a $\lambda = 2$ como autovalor repetido. Tenemos también que $x(t) = c_1 e^{2t}$. Usando ésto en la ecuación para y ,

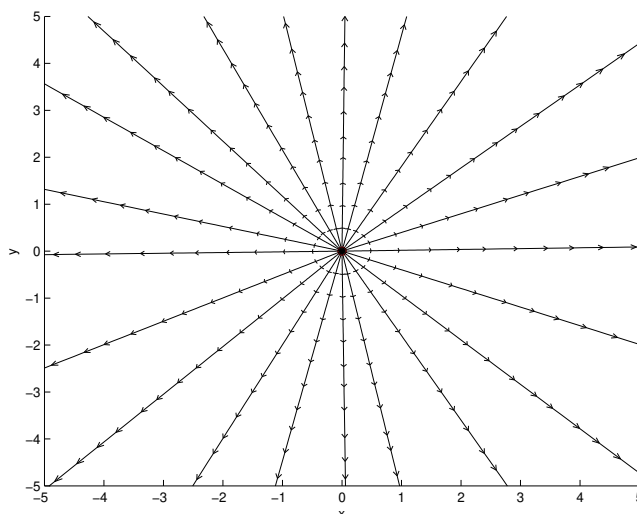


Figura 4.9: Plano fase del primer sistema en el Ejemplo (4.19). El origen es un nodo propio inestable.

tenemos que ésta es solución de la ecuación diferencial:

$$y'(t) - 2y(t) = c_1 e^{2t}.$$

Esta ecuación es lineal con solución general:

$$y(t) = (c_1 t + c_2) e^{2t}.$$

Si $c_1 = 0$ tenemos la misma situación que en la primera parte de este ejemplo con dos trayectorias saliendo del origen a lo largo del eje de y . Si $c_1 \neq 0$, podemos usar que $x(t) = c_1 e^{2t}$ para eliminar la t en la expresión de y . Luego de simplificar obtenemos que:

$$y = \frac{x}{2} \ln |x| + cx,$$

donde la constante c envuelve a c_1, c_2 . Con esta última ecuación podemos completar el diagrama de fase el cuál mostramos en la Figura (4.10). En este caso el origen es un nodo impropio inestable. \square

4.2.4 Raíces complejas

Sabemos en este caso que si $\lambda = p + qi$ es valor propio de la matriz de coeficientes A , con vector propio $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces la

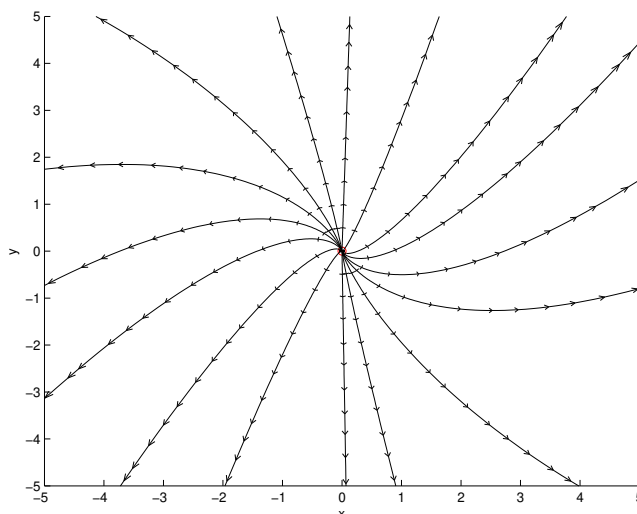


Figura 4.10: Plano fase del segundo sistema en el Ejemplo (4.19). El origen es un nodo impropio inestable.

solución general de (4.5) tiene la forma (cf. (9.22)):

$$\mathbf{x}(t) = e^{pt} [(c_1 \sen qt + c_2 \cos qt) \mathbf{v}_1 + (c_1 \cos qt - c_2 \sen qt) \mathbf{v}_2].$$

Note que los coeficientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son funciones periódicas con periodo $2\pi/q$. Si $p < 0$ entonces las soluciones

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

y las trayectorias son *espirales* que entran al punto crítico (vea la Figura (4.11)) el cuál es asintóticamente estable. Si $p > 0$ entonces la situación es similar pero los espirales salen del punto crítico y éste es inestable. Cuando $p = 0$ las trayectorias son periódicas alrededor del punto crítico el cuál se llama *centro* en este caso y es estable. La dirección de recorrido de las trayectorias dependerá del propio sistema de ecuaciones. El plano fase se muestra en la Figura (4.12).

Ejemplo 4.20. Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

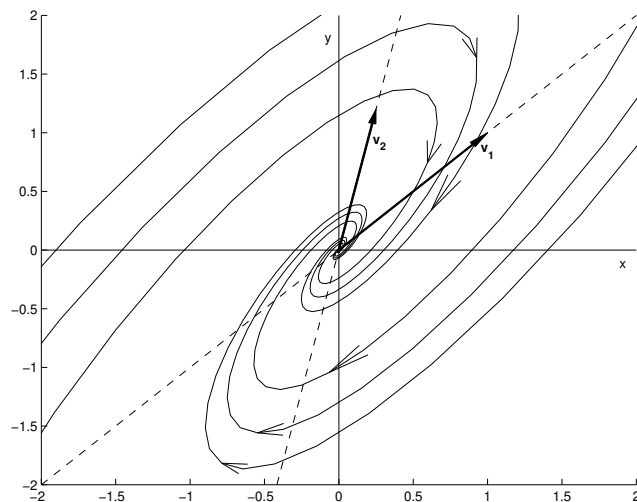


Figura 4.11: Plano fase cuándo los valores propios son complejos con parte real negativa (espiral).

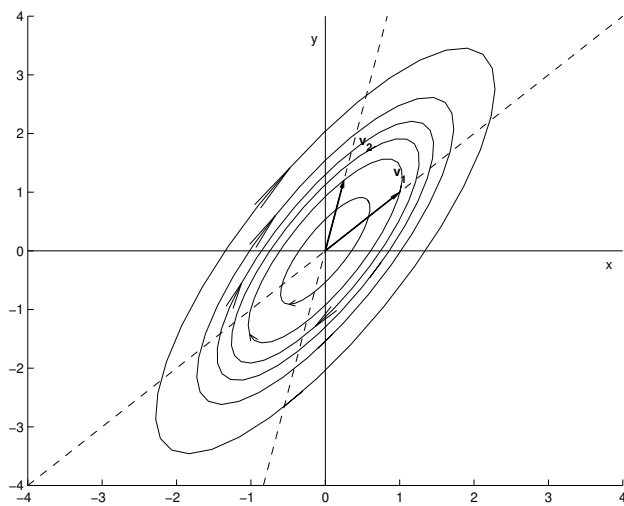


Figura 4.12: Plano fase cuándo los valores propios son complejos con parte real cero (centro).

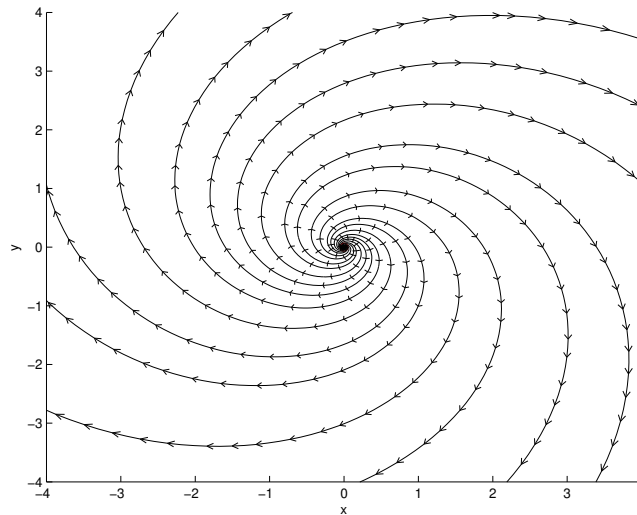


Figura 4.13: Plano fase del sistema del Ejemplo (4.20). El origen es un espiral inestable.

la matriz de coeficientes tiene los autovalores $\lambda = 1 \pm 2i$. De modo que el origen es un espiral inestable. Mostramos el diagrama de fase para este problema en la Figura (4.13).

Por otro lado, en el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

la matriz de coeficientes tiene los autovalores $\lambda = \pm 2i$. Así que el origen es un centro estable. El diagrama de fase en este caso se muestra en la Figura (4.14).

□

Los resultados sobre la estabilidad del punto crítico para el sistema lineal (4.5) cuando (4.6) se cumple, los podemos resumir en los tres siguientes casos (vea también la Tabla 4.1):

- i) Si las raíces son reales y negativas o complejas con parte real negativa, entonces todas las trayectorias tienden al punto crítico $(0, 0)$ según $t \rightarrow \infty$. En estos casos $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

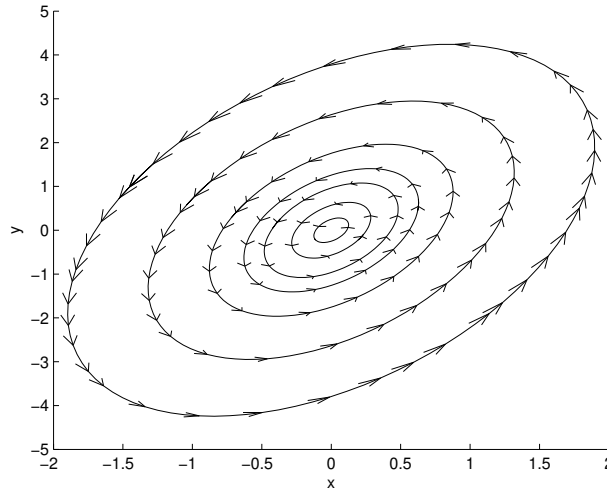


Figura 4.14: Plano fase para el segundo sistema del Ejemplo (4.20). El origen es un centro estable.

- ii) Si las raíces son complejas puramente imaginarias, entonces las trayectorias son curvas cerradas alrededor del punto crítico el cuál es estable.
- iii) Si las raíces son reales con al menos una positiva o complejas con parte real positiva, entonces al menos una trayectoria “tiende a infinito” según $t \rightarrow \infty$ y el punto crítico es inestable.

4.2.5 Determinante Zero

En esta pequeña sección vamos a considerar el caso en que (4.6) no se cumple, i.e., cuándo $ad - bc = 0$. En este caso $\lambda_1 = 0$ es un valor propio de la matriz de coeficientes A en (4.5). Si este valor propio es simple y $\lambda_2 \neq 0$ es el otro valor propio, entonces A tiene dos vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linealmente independientes y la solución general de (4.5) está dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Los puntos críticos del sistema consisten del espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$, i.e., el espacio generado por \mathbf{v}_1 . De modo que la solución

λ_1, λ_2	signos	estabilidad	tipo diagrama de fase
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 > 0$	positivas	inestable	nodo impropio
	negativas	asint. estable	nodo impropio
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	diferentes	inestable	silla de caballo
$\lambda_1 = \lambda_2$	positiva	inestable	nodo propio o impropio
	negativa	asint. estable	nodo propio o impropio
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi, a \neq 0$	positiva	inestable	espiral
	negativa	asint. estable	espiral
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi, a = 0$	no aplica	estable	centro

Tabla 4.1: Estabilidad y tipo de diagrama de fase para el punto critico $(0, 0)$ (4.5) cuando (4.6) se cumple.

general de arriba describe una trayectoria que entra al punto $c_1 \mathbf{v}_1$ a través de \mathbf{v}_2 según $t \rightarrow \infty$ si $\lambda_2 < 0$. Si $\lambda_2 > 0$ la situación es similar pero con las trayectorias saliendo de $c_1 \mathbf{v}_1$ según $t \rightarrow \infty$. En la Figura (4.15) se ilustra el caso en que $\lambda_2 < 0$.

Cuando $\lambda_1 = 0$ es valor propio doble, hay todavía dos posibilidades más. Si existen dos vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linealmente independientes correspondientes a $\lambda_1 = 0$, esto es, si A es no-defectuosa, entonces la solución general de (4.5) es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2.$$

Note que todo punto del plano es punto de equilibrio y que todas las soluciones del sistema son constantes. Si por el contrario A es defectuosa con vector propio \mathbf{v}_1 y vector propio generalizado \mathbf{w}_1 , entonces la solución general de (4.5) es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 (t \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) = (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{w}_1) + c_2 t \mathbf{v}_1.$$

Tenemos ahora que la recta que pasa por el origen con dirección \mathbf{v}_1 consiste en su totalidad de puntos críticos. La trayectoria de arriba describe una recta en el plano que pasa por el punto $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{w}_1$ en dirección de $c_2 \mathbf{v}_1$. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ son linealmente independiente, éstas rectas cubren todo el plano. Ninguna trayectoria tiende a punto critico alguno a menos que $c_2 = 0$ en cuál caso la trayectoria es constante y coincide con el punto critico $c_1 \mathbf{v}_1$. El diagrama de fase se muestra en la Figura (4.16).

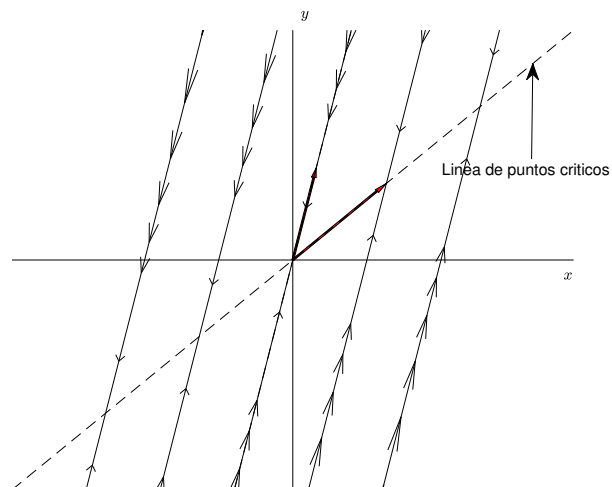


Figura 4.15: Plano fase cuándo el determinante de A es cero con valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$.

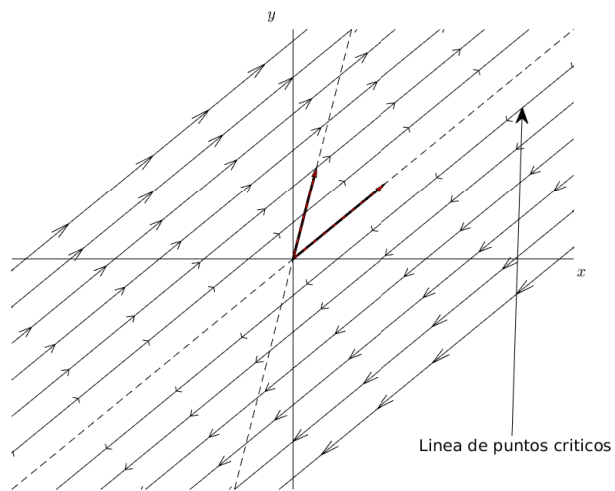


Figura 4.16: Plano fase cuándo el determinante de A es cero y la matriz es defectuosa.

4.3 El Plano Fase—Sistemas Nolineales

Pasamos ahora a estudiar el sistema (4.1) en una vecindad de un punto crítico. Si (x_0, y_0) es un punto crítico del sistema (4.1), entonces decimos que (4.3) es la *linealización de (4.1) alrededor del punto crítico*. Note que (x_0, y_0) es también punto crítico de (4.3). Sea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

y λ_1, λ_2 las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc, \quad (4.12)$$

donde suponemos que $ad - bc \neq 0$. Tenemos ahora que:

Teorema 4.21. *Sean λ_1, λ_2 las raíces de (4.12). La estabilidad y diagrama de fase local del punto crítico (x_0, y_0) del sistema (4.1) es igual que para la linealización (4.3) excepto en los casos en que:*

- i) ambas raíces son iguales en cuál caso el punto crítico de (4.1) puede ser un nodo propio, impropio, o un espiral siendo asintóticamente estable si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ e inestable de lo contrario;*
- ii) cuándo las raíces son puramente imaginarias, en cuál caso el punto crítico de (4.1) puede ser un centro o un espiral donde la estabilidad de éste dependerá del sistema bajo consideración.*

No presentamos la demostración de este teorema pero la misma se basa en consideraciones sobre como varían las raíces del sistema lineal bajo perturbaciones pequeñas. En resumen podemos decir que la estabilidad del sistema (4.1) alrededor del punto crítico (x_0, y_0) es igual a la del sistema lineal (4.3) excepto en el caso en las raíces λ_1, λ_2 correspondientes a (4.3) son puramente imaginarias.

Ejemplo 4.22. Considere el sistema de ecuaciones

$$x'(t) = x(t) + y^2(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t).$$

Los puntos críticos de este sistema están dados por las soluciones de

$$x + y^2 = 0, \quad x + y = 0,$$

que son $(0, 0)$, $(-1, 1)$.

Usando (4.11) tenemos que para el punto crítico $(0, 0)$, la matriz de coeficientes de la linealización es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cuál tiene valores propios $\lambda = 1$ doble. De modo que $(0, 0)$ es un nodo propio o impropio o espiral para el sistema original y es inestable.

Para el punto crítico $(-1, 1)$, la matriz (4.11) está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cuál tiene valores propios $1 \pm \sqrt{2}$. Así que el punto crítico $(-1, 1)$ es una silla de caballo para el sistema no lineal y por consecuencia es inestable. El diagrama de fase, generado con programación de computadoras, se muestra en la Figura (4.17). Este diagrama indica que de hecho, el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo impropio. \square

4.3.1 El Péndulo Simple con Fricción

Estudiamos ahora el movimiento de un péndulo de masa m y largo l sujeto a una fuerza de fricción proporcional a la velocidad angular. Si $\theta(t)$ es el ángulo que hace el péndulo con la vertical en el tiempo t , entonces una aplicación directa de la segunda ley de Newton nos da que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{ml} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

donde c es la constante de proporcionalidad para la fuerza de fricción y g es la constante de la aceleración de gravedad. (Vea la Figura (4.18).) Tomando

$$x(t) = \theta(t), \quad y(t) = \frac{d\theta(t)}{dt},$$

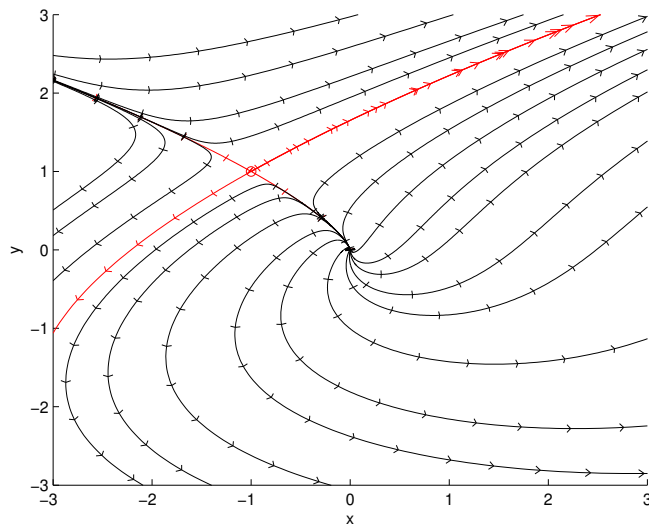


Figura 4.17: Plano fase para el sistema del Ejemplo (4.22).

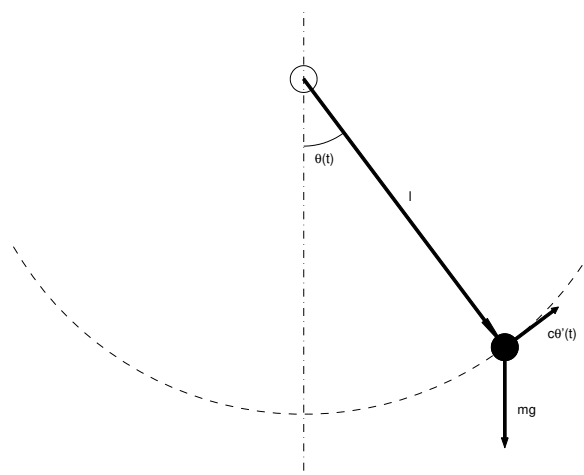


Figura 4.18: Péndulo de largo l y masa m sujeto a una fuerza de fricción y a la de gravedad.

tenemos que la ecuación del péndulo es equivalente al sistema autónomo:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -\frac{c}{ml} y(t) - \frac{g}{l} \operatorname{sen} x(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

Los puntos críticos de este sistema están dados por las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ con $y = 0$, es decir

$$(n\pi, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.14)$$

En el caso n par, estos puntos críticos corresponden al estado del péndulo donde la masa m descansa (con velocidad angular cero) en la parte de abajo del círculo de radio l , mientras que en el caso impar, la masa esta perfectamente balanceada en la parte de arriba de dicho círculo.

La matriz de coeficientes de la linealización de (4.13) evaluada en los puntos críticos está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}(-1)^n & -\frac{c}{ml} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

En el caso en que n es par, los valores propios de ésta matriz son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4m^2gl}}{2ml}. \quad (4.16)$$

Tenemos ahora tres sub-casos cuándo n es par:

- i) Si $D \equiv c^2 - 4m^2gl > 0$, entonces como $c > 0$ tenemos dos raíces distintas pero ambas negativas. Así que el punto crítico (4.14) es un nodo impropio asintóticamente estable.
- ii) Si $D = 0$, entonces tenemos una raíz doble negativa. Así que el punto crítico es un nodo propio o impropio, o un espiral y es asintóticamente estable.
- iii) Si $D < 0$, entonces las raíces son complejas con parte real negativa por lo que el punto crítico es un espiral asintóticamente estable.

Así que cuándo n es par, el punto crítico (4.14) es siempre asintóticamente estable.

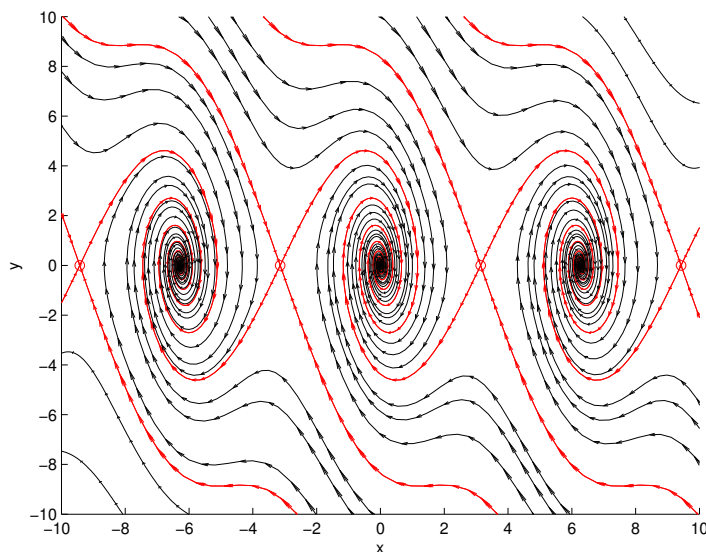


Figura 4.19: Plano fase para el péndulo simple en el caso en que $l = 1$, $g = 9.8$, y $c = m$.

Cuando n es impar los valores propios de la matriz (4.15) son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4m^2gl}}{2ml}. \quad (4.17)$$

Tenemos ahora dos raíces distintas con una positiva y la otra negativa. Así que el punto crítico (4.14) es una silla de caballo y por consiguiente inestable. En la Figura (4.19) mostramos un diagrama de fase típico para el péndulo simple donde los puntos críticos con n par caen en el caso (iii) descrito arriba. Note que cada punto silla de caballo tiene dos trayectorias que entran al punto crítico. Estas trayectorias se llaman *separatrices* ya que dividen el plano fase en sectores. También hay dos trayectorias que salen del punto silla de caballo. En este diagrama éstas trayectorias tienden al punto crítico “vecino” que es un espiral pero general pudieran no tender a ningún punto crítico y serían también *separatrices*.

4.3.2 Modelos Ecológicos de Presa–Depredador

Vamos ahora a examinar un modelo que describe las poblaciones de dos especies que interactúan una con la otra de modo que una (depredadores) se *alimenta* de la otra (presas). Algunos ejemplos de este tipo de poblaciones serían tiburones y peses, o zorros y conejos, etc. El modelo que utilizamos fue propuesto por Lotka–Volterra (1925) y está dado por el sistema autónomo:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) && - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= && - cy(t) + dx(t)y(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $x(t), y(t)$ son las poblaciones de presas y depredadores respectivamente en tiempo t y a, b, c, d son parámetros positivos que caracterizan a las poblaciones. Note que en ausencia de los depredadores ($y = 0$) las presas crecen exponencialmente, mientras que en ausencia de presas ($x = 0$) los depredadores decaen o mueren exponencialmente. El término $x(t)y(t)$ modela la interacción entre las dos especies y es negativo para las presas ya que simula el que éstas sean cazadas por los depredadores, mientras que es positivo para los depredadores ya que éstos aumentan al alimentarse o cazar las presas.

Los puntos críticos del sistema (4.18) están dados por las soluciones de:

$$x(a - by) = 0, \quad y(-c + dx) = 0,$$

cuyas soluciones son $(0, 0)$, $(c/d, a/b)$. La matriz (4.11) en el punto crítico (x_0, y_0) está dada por:

$$\begin{pmatrix} a - by_0 & -bx_0 \\ dy_0 & -c + dx_0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Para el punto crítico $(0, 0)$ ésta matriz reduce a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios $\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -c < 0$. Así que el punto crítico $(0, 0)$ es una silla de caballo para el sistema (4.18). Note que $x(t) = 0$, $y(t) = Ce^{-ct}$ es una trayectoria que tiende al punto crítico $(0, 0)$, mientras que $x(t) = De^{at}$, $y(t) = 0$ es una trayectoria que sale del punto crítico. Ambas trayectorias son separatrices para el sistema (4.18)

Para el punto crítico $(c/d, a/b)$, tenemos que (4.19) reduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

la cuál tiene valores propios $\pm i\sqrt{ac}$. De modo que estamos en el caso ambiguo del Teorema (4.21) ya que el punto crítico puede ser tanto un espiral asintóticamente estable como inestable, o un centro.

Para determinar en que caso cae el punto crítico $(c/d, a/b)$ hay que analizar la estructura particular del sistema (4.18). Note que la ecuación (4.2) para las trayectorias de (4.18) es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Esta ecuación es separable y tiene solución general

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + C,$$

para alguna constante C , o lo mismo

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx}.$$

donde $K > 0$. Es posible demostrar que ésta curva representa una trayectoria cerrada en el plano fase que contiene al punto crítico $(c/d, a/b)$. Aunque no demostraremos ésto, vamos a examinar un argumento gráfico que ilustra éste resultado y que fue originalmente presentado por el propio Volterra. Para ésto nos limitamos al caso en que $x, y > 0$ e introducimos las variables nuevas z, w definidas por

$$z = y^a e^{-by}, \quad w = K x^{-c} e^{dx}. \quad (4.20)$$

En la Figura (4.20) mostramos un par de gráficas típicas de z como función de $y \geq 0$, y w como función de $x > 0$. Estas gráficas las ensamblamos ahora en un sistema de coordenadas que se muestra en la Figura (4.21) donde aparecen las cuatro variables x, y, z, w para valores positivos de éstas. El punto A indica el valor máximo de z en la curva C_1 . A este punto se le asocia el punto M en la recta $z = w$ al cuál a su vez se le asocian los dos puntos A_1, A_2 en la curva C_2 . Las coordenadas en x de A_1, A_2 corresponden a los valores mínimo y máximo respectivamente de x posibles en la trayectoria C_3 . El punto B en

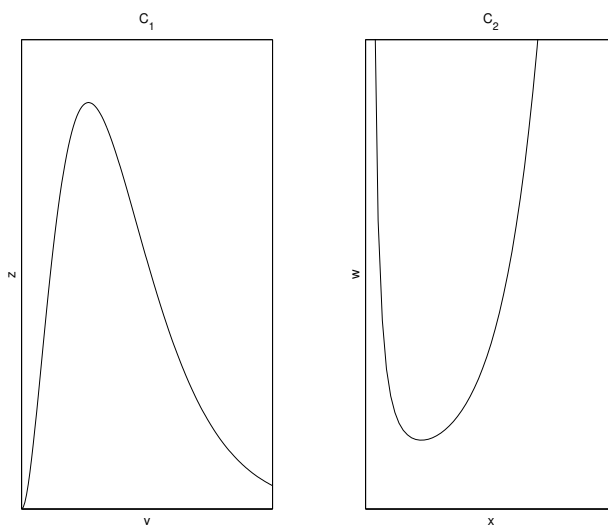


Figura 4.20: Gráficas típicas para las funciones (4.20).

C_2 marca el mínimo de w en dicha curva e induce, por medio del punto N en la línea $z = w$, los dos puntos B_1, B_2 cuyas coordenadas y definen los valores mínimo y máximo posibles para y en la trayectoria C_3 . Cualquiera otro par de puntos en la curva C_1 entre A y B_1, B_2 (o en la curva C_2 entre A_1, A_2 y B) va a inducir, luego de hacer las reflexiones correspondientes con respecto a la línea $z = w$, cuatro puntos en la trayectoria C_3 como se muestra en el rectángulo rojo de la Figura (4.21). A medida que el valor de K disminuye, el tamaño de la curva C_3 aumenta, mientras que si K aumenta la curva C_3 se hace más pequeña hasta colapsar con el punto crítico $(c/d, a/b)$. De esta forma se argumenta que el punto crítico $(c/d, a/b)$ es un centro y la dirección de movimiento de las trayectorias se determina a partir de los signos de las derivadas en (4.18). Por ejemplo, si $x < c/d$ y $y > a/b$, entonces $x'(t) < 0$ y $y'(t) < 0$. De esta forma se determina que la dirección de movimiento es en contra de las manecillas del reloj. En la Figura (4.22) mostramos el diagrama de fase para el caso en que $a = b = c = d = 1$.

4.3.3 Especies en Competencia

Estudiamos ahora un modelo para la situación en que dos especies compiten por alimento o espacio. Ninguna asume el rol de presa o depredador. Si

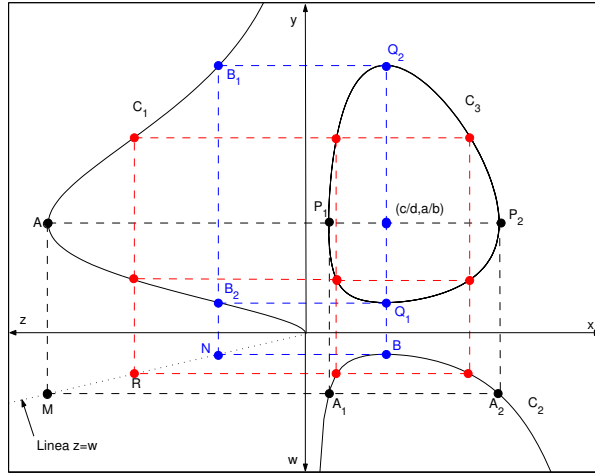


Figura 4.21: Diagrama que ilustra las cuatro variables x, y, z, w donde $x, y > 0$ y z, w están dadas por (4.20).

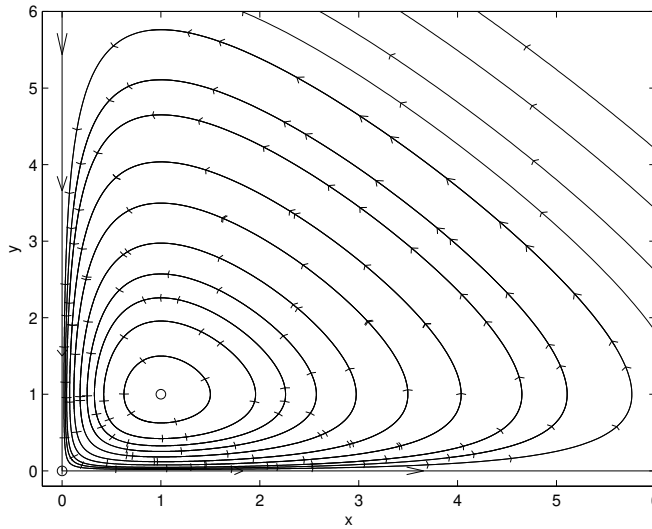


Figura 4.22: Plano fase para el sistema (4.18) cuándo $a = b = c = d = 1$.

$x(t), y(t)$ representan las poblaciones en tiempo t , entonces el modelo está dado por el sistema:

$$\begin{aligned}x'(t) &= a_1x(t) - b_1x^2(t) - c_1x(t)y(t), \\y'(t) &= a_2y(t) - b_2y^2(t) - c_2x(t)y(t),\end{aligned}\tag{4.21}$$

donde $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$ son constantes positivas. Los primeros dos términos en cada ecuación corresponden a crecimiento de tipo logístico en ausencia de la otra población, mientras que el tercer término corresponde o modela la competencia entre especies.

Los puntos críticos de este sistema están dados por las soluciones de:

$$x(a_1 - b_1x - c_1y) = 0, \quad y(a_2 - b_2y - c_2x) = 0.$$

Las soluciones de éstas ecuaciones son $(0, 0)$, $(0, a_2/b_2)$, $(a_1/b_1, 0)$, y (x_e, y_e) donde éste último punto es solución de

$$a_1 - b_1x - c_1y = 0, \quad a_2 - b_2y - c_2x = 0.$$

Si suponemos que $b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$, entonces éste último sistema tiene solución única la cuál está dada por:

$$x_e = \frac{a_1b_2 - a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \quad y_e = \frac{b_1a_2 - a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2}.\tag{4.22}$$

Suponemos que $x_e, y_e > 0$.²

La linealización de (4.21) en un punto (x_0, y_0) cualquiera tiene matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2b_1x_0 - c_1y_0 & -c_1x_0 \\ -c_2y_0 & a_2 - 2b_2y_0 - c_2x_0 \end{pmatrix}.\tag{4.23}$$

Analizamos ahora cada uno de los cuatro puntos críticos:

- Para el punto crítico $(0, 0)$, la matriz (4.23) reduce a:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios $a_1, a_2 > 0$ con vectores propios correspondientes $(1, 0)^t, (0, 1)^t$. De modo que el origen es un nodo impropio si $a_1 \neq a_2$, o nodo propio o impropio o espiral si $a_1 = a_2$.

En cualquier caso el punto crítico es inestable.

²Esto al igual que la condición $b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$, impone restricciones en los coeficientes del sistema original.

- Para el punto crítico $(0, a_2/b_2)$, la matriz (4.23) reduce a:

$$\begin{pmatrix} (a_1b_2 - c_1a_2)/b_2 & 0 \\ -c_2a_2/b_2 & -a_2 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios

$$\frac{a_1b_2 - c_1a_2}{b_2}, \quad -a_2.$$

El segundo valor propio es negativo pero el signo del primero, cuyo numerador es igual al de x_e , no se puede determinar en este momento. Así que por ahora éste punto crítico no lo podemos clasificar. (¡Lo haremos más adelante!)

- El punto crítico $(a_1/b_1, 0)$ tiene para la linealización la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -c_1a_1/b_1 \\ 0 & (a_2b_1 - a_1c_2)/b_1 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios

$$-a_1, \quad \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{b_1}.$$

El primer valor propio es negativo pero el signo del segundo, cuyo numerador es igual al de y_e , no lo podemos determinar en este momento.

- Para el punto crítico (x_e, y_e) la matriz (4.23) reduce a

$$\begin{pmatrix} -b_1x_e & -c_1x_e \\ -c_2y_e & -b_2y_e \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz están dados por las raíces de:

$$\lambda^2 + (b_1x_e + b_2y_e)\lambda + x_ey_e(b_1b_2 - c_1c_2) = 0. \quad (4.24)$$

Es fácil verificar que las raíces de ésta ecuación son siempre reales, distintas, con una de ellas siempre negativa. Nuestras hipótesis al momento son que

$$b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0, \quad x_e, y_e > 0. \quad (4.25)$$

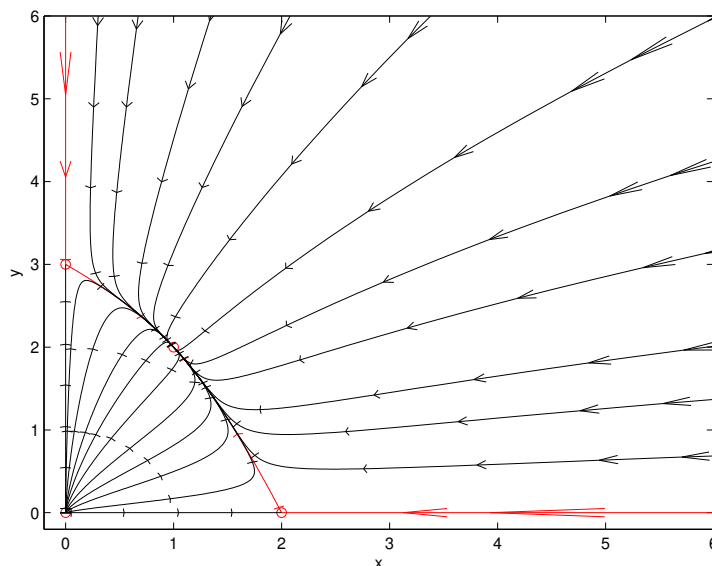


Figura 4.23: Diagrama de fase para el sistema (4.21) para los valores de $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 1$.

Si $b_1 b_2 - c_1 c_2 > 0$, entonces las raíces de (4.24) son ambas negativas por lo que (x_e, y_e) es un nodo impropio asintóticamente estable. Tenemos también que en este caso

$$a_1 b_2 - c_1 a_2 > 0, \quad a_2 b_1 - a_1 c_2 > 0,$$

por lo que $(0, a_2/b_2)$, $(a_1/b_1, 0)$ son sillas de caballo. En este caso se dice que la competencia es pequeña y que las especies tienden a coexistir. En la Figura (4.23) mostramos un diagrama de fase típico en este caso.

Si $b_1 b_2 - c_1 c_2 < 0$, entonces las raíces de (4.24) son de signos distintos por lo que (x_e, y_e) es ahora una silla de caballo. Además

$$a_1 b_2 - c_1 a_2 < 0, \quad a_2 b_1 - a_1 c_2 < 0,$$

por lo que $(0, a_2/b_2)$, $(a_1/b_1, 0)$ son ahora nodos impropios asintóticamente estables. De modo que en este caso la competencia es fuerte y

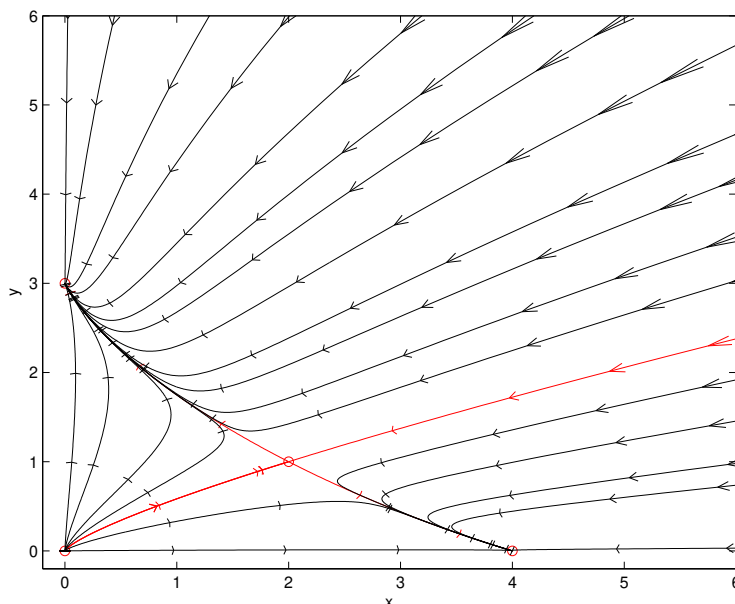


Figura 4.24: Diagrama de fase para el sistema (4.21) para los valores de $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $b_1 = b_2 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.

en general una de las especies tiende a desaparecer. En la Figura (4.24) mostramos un diagrama de fase típico en este caso.

4.3.4 Sistema de Masa–Resorte Nolineal

Consideramos ahora un sistema de masa–resorte que se desliza horizontalmente sobre una mesa y a su vez sujeto a una pared. Sobre la masa m actúan dos fuerzas: F_r la fuerza que ejerce el resorte, y F_f la fuerza de fricción al deslizarse sobre la mesa. Si $x(t)$ representa el desplazamiento del sistema de su posición de equilibrio, entonces la ecuación de movimiento del sistema está dada por:

$$mx''(t) = F_f + F_r.$$

La fuerza de fricción se toma proporcional a la velocidad, es decir

$$F_f = -cx'(t), \quad c > 0,$$

aunque hay otros modelos posibles. La fuerza del resorte la tomamos no lineal de la forma:

$$F_r = -kx(t) + \beta x^3(t), \quad k > 0, \quad \beta \neq 0.$$

Si $\beta < 0$ decimos que el resorte es *fuerte* y si $\beta > 0$ el resorte se llama *suave*. La ecuación de movimiento de arriba toma entonces la forma:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) - \beta x^3(t) = 0. \quad (4.26)$$

Si hacemos el cambio de variables

$$u(t) = x(t), \quad v(t) = x'(t),$$

entonces la ecuación (4.26) es equivalente al sistema autónomo:

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t), \\ v'(t) &= -\frac{c}{m}v(t) - \frac{k}{m}u(t) + \frac{\beta}{m}u^3(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

Los puntos críticos del sistema son las soluciones de

$$v = 0, \quad \beta u^3 - ku - cv = 0,$$

El par $(0, 0)$ siempre es solución de éstas ecuaciones y es el único punto crítico si $\beta < 0$ (resorte fuerte). Si $\beta > 0$ tenemos dos puntos críticos adicionales:

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\beta}}, 0 \right), \quad \left(-\sqrt{\frac{k}{\beta}}, 0 \right). \quad (4.28)$$

La linealización de (4.27) en un punto (u_0, v_0) cualquiera tiene matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} + \frac{3\beta}{m}u^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Consideramos primero el caso sin fricción, esto es cuándo $c = 0$. Para el punto crítico $(0, 0)$, la matriz (4.29) reduce a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios $\lambda = \pm\sqrt{k/m}i$. Así que $(0, 0)$ es un centro para la linealización. Un argumento basado en el principio de conservación de

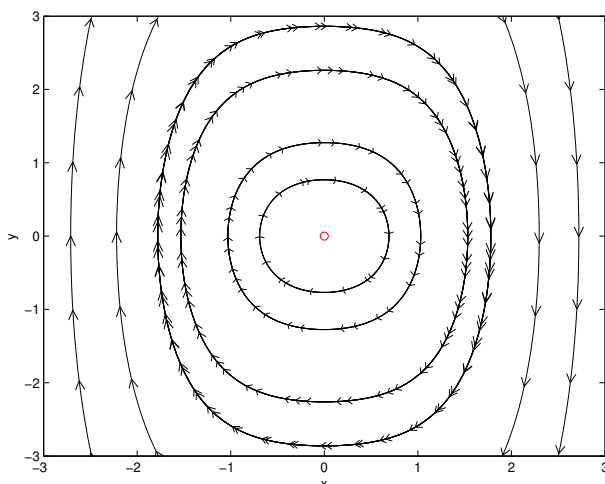


Figura 4.25: Diagrama de fase para el sistema (4.27) para los valores de $k = 1$, $c = 0$, $m = 1$, $\beta = -1$.

energía se puede utilizar ahora para demostrar que $(0, 0)$ sigue siendo un centro para el sistema no lineal (4.27). Si $\beta < 0$ entonces $(0, 0)$ es el único punto crítico y el diagrama de fase queda como en la Figura (4.25). Si $\beta > 0$ tenemos los dos puntos críticos adicionales (4.28). La matriz (4.29) simplifica en este caso a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k}{m} & 0 \end{pmatrix},$$

la cuál tiene valores propios $\lambda = \pm\sqrt{2k/m}$ siendo entonces ambos puntos críticos (4.28) unas sillas de caballo. El diagrama de fase queda ahora como en la Figura (4.26).

En el caso $c \neq 0$ y $\beta < 0$, la matriz (4.29) en el punto $(0, 0)$ reduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene valores propios

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

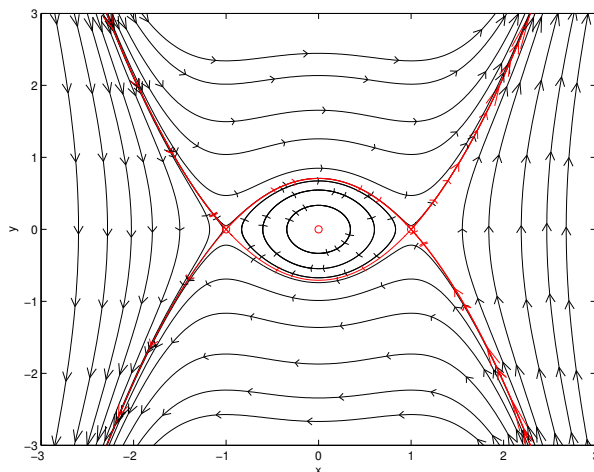


Figura 4.26: Diagrama de fase para el sistema (4.27) para los valores de $k = 1$, $c = 0$, $m = 1$, $\beta = 1$.

Estas raíces son complejas con parte real negativa si $c^2 < 4km$ o ambas reales y negativas si $c^2 \geq 4km$. De modo que el punto $(0, 0)$ es un espiral en el primer caso y un nodo propio o impropio en el segundo caso, pero en ambos casos es asintóticamente estable. En la Figura (4.27) mostramos dos diagramas de fase típicos de cada caso. Si $\beta > 0$ el punto crítico sigue siendo como descrito antes pero ahora tenemos los puntos críticos (4.28). La matriz (4.29) reduce ahora a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene valores propios

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 8km}}{2m},$$

los cuáles son reales de signos opuestos. Así que los puntos críticos (4.28) son sillas de caballo para el sistema (4.27). En la Figura (4.28) se muestran dos diagramas de fase típicos de este caso.

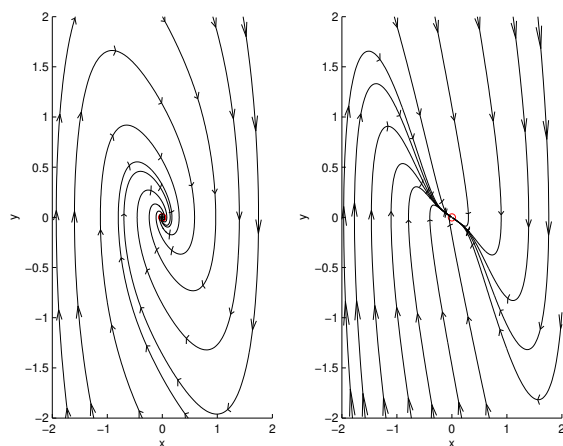


Figura 4.27: Diagramas de fase para el sistema (4.27) para los valores de $k = 1$, $m = 1$, $\beta = -1$ con: $c = 1$ diagrama de la izquierda y $c = 3$ para el de la derecha.

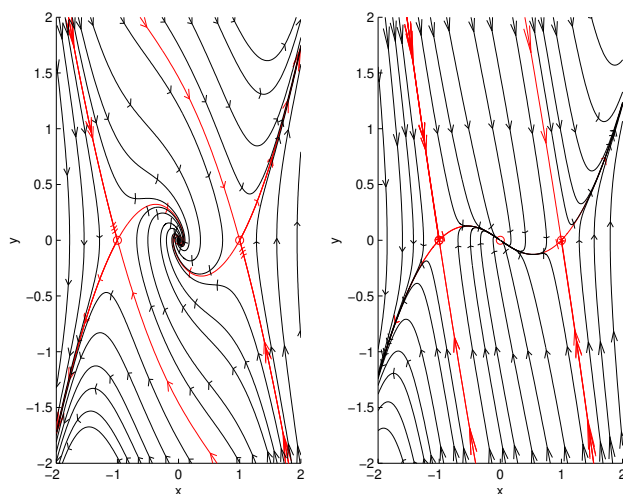


Figura 4.28: Diagramas de fase para el sistema (4.27) para los valores de $k = 1$, $m = 1$, $\beta = 1$ con: $c = 1$ diagrama de la izquierda y $c = 3$ para el de la derecha.

4.4 Ejercicios

Ejercicio 4.1. Verifique que con el cambio de variables $x(t) = u(t)$, $y(t) = u'(t)$, la ecuación diferencial escalar de orden dos autónoma $u''(t) = H(u(t), u'(t))$ es equivalente al siguiente sistema autónomo:

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= H(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Ejercicio 4.2. Verifique que el sistema autónomo lineal:

$$x'(t) = ax(t) + by(t), \quad y'(t) = cx(t) + dy(t),$$

se puede resolver buscando primero la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial escalar de orden dos de coeficientes constantes:

$$y''(t) = (a + d)y'(t) + (bc - ad)y(t),$$

y luego, resolviendo la ecuación diferencial escalar lineal de orden uno:

$$x'(t) = ax(t) + by(t).$$

Ejercicio 4.3. Halle la solución general del sistema $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ donde:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4.4. Considere el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Dado que $\pm\sqrt{2}$ son los valores propios de la matriz de coeficientes, clasifique el punto crítico $(0, 0)$ del sistema y determine su estabilidad.

Ejercicio 4.5. Considere el sistema:

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t) - y(t) - x^2(t).$$

Dado que $(0, 0)$ es un punto crítico de este sistema, clasifique a $(0, 0)$ y determine su estabilidad.

Ejercicio 4.6. Halle los puntos críticos de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 2y$

b) $\frac{dx}{dt} = x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = y + 2xy$

c) $\frac{dx}{dt} = x - x^2 - xy, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$

d) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}x - \frac{c}{ml}y, \quad g, l, m, c > 0$

e) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(x) - \frac{c}{ml}y, \quad g, l, m, c > 0$

f) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x, \quad \mu > 0$

Ejercicio 4.7. Para los siguientes sistemas, clasifique el punto crítico $(0, 0)$ y determine su estabilidad:

a) $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 2y$

b) $\frac{dx}{dt} = 5x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x + y$

c) $\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - 2y$

d) $\frac{dx}{dt} = x - 4y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 7y$

e) $\frac{dx}{dt} = x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y$

f) $\frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y$

g) $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y$

h) $\frac{dx}{dt} = -x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}y$

Ejercicio 4.8. Para los siguientes sistemas, determine el punto crítico (x_0, y_0) . Clasifique el punto crítico y determine su estabilidad.

a) $\frac{dx}{dt} = x + y - 2, \quad \frac{dy}{dt} = x - y$

b) $\frac{dx}{dt} = -2x + y - 2, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + 1$

c) $\frac{dx}{dt} = -x - y - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y + 5$

d) $\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = -\gamma + \delta x, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

Ejercicio 4.9. Verifique que $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema dado. Discuta el tipo y estabilidad de $(0, 0)$ con relación al sistema dado (el no lineal).

a) $\frac{dx}{dt} = x - y + xy, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - xy$

b) $\frac{dx}{dt} = x + x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = y - xy$

c) $\frac{dx}{dt} = -2x - y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2)$

d) $\frac{dx}{dt} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$

e) $\frac{dx}{dt} = 2x + y + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y - xy$

f) $\frac{dx}{dt} = x + 2x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + x^3$

g) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu y(1 - x^2), \quad \mu > 0$

h) $\frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x}, \quad \frac{dy}{dt} = y - \sin(x)$

i) $\frac{dx}{dt} = (1 + x) \sin(y), \quad \frac{dy}{dt} = 1 - x - \cos(y)$

j) $\frac{dx}{dt} = e^{x+y} - \cos(x), \quad \frac{dy}{dt} = \sin(x - 3y)$

Ejercicio 4.10. Halle todos los puntos críticos del sistema dado. Para cada punto crítico, determine su estabilidad y tipo. Usando el programa PPLANE, genere un diagrama de fase del sistema indicando todos los puntos críticos.

a) $\frac{dx}{dt} = x + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$

b) $\frac{dx}{dt} = 1 - xy, \quad \frac{dy}{dt} = x = y^3$

c) $\frac{dx}{dt} = x - x^2 - xy, \quad \frac{dy}{dt} = 3y - xy - 2y^2$

d) $\frac{dx}{dt} = 1 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2$

Ejercicio 4.11. Considere el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - xy - 2y^2. \end{cases}$$

- Halle todos los puntos críticos del sistema.
- Determine la estabilidad de cada punto crítico y el tipo de diagrama de fase para el sistema linealizado alrededor de cada punto crítico.
- Determine la estabilidad de cada punto crítico y el tipo de diagrama de fase para el sistema original.
- Haga un trazado del plano fase con algunas trayectorias para el problema original.

Ejercicio 4.12. Considere el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

el cual tiene a $(0, 0)$ como único punto crítico.

- Determine la estabilidad del punto crítico y el tipo de diagrama de fase para el sistema linealizado alrededor del punto crítico. ¿Puede concluir algo sobre la estabilidad y diagrama de fase del sistema original?
- Verifique que el cambio de variables $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ transforma el sistema original al sistema:

$$\frac{dr}{dt} = -r^3, \quad \frac{d\theta}{dt} = -r.$$

Usando esto determine el tipo de estabilidad y diagrama de fase del sistema original.

Ejercicio 4.13. La ecuación de van der Paul (1889-1959) está dada por:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \mu(1 - u^2)\frac{du}{dt} + u = 0,$$

donde μ es una constante positiva.

- a) Mediante la sustitución $x = u$, $y = \frac{du}{dt}$, convierta la ecuación diferencial dada a un sistema de ecuaciones no lineal 2×2 de orden uno.
- b) Halle los puntos críticos de dicho sistema y determine el tipo y estabilidad de cada uno.
- c) Usando el programa PPLANE, genere los diagramas de fase del sistema correspondientes a $\mu = 0.1, 0.8, 1$, y 5 .

Capítulo 5

Métodos de series de potencias

Los métodos de series de potencias se utilizan para obtener lo que se conocen como *expansiones asintóticas* de las soluciones de una ecuación diferencial. Estos métodos son más generales que los llamados métodos analíticos o exactos ya que son aplicables a una mayor clase de ecuaciones diferenciales. Aunque estudiaremos estos métodos solo para problemas lineales, los métodos de series de potencias pueden utilizarse en problemas no lineales igualmente. Estas representaciones en serie de las soluciones de una ecuación diferencial se utilizan usualmente como aproximaciones iniciales para otros métodos numéricos de aproximación más generales.

La discusión en este capítulo se divide esencialmente en dos casos o categorías: puntos ordinarios o puntos singulares. Cuando el punto alrededor del cual se busca la solución en serie de potencias es tal que las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen en una vecindad de éste, decimos que este punto es *ordinario*. De lo contrario el punto se llama *singular*. Si la “singularidad” alrededor de un punto singular no es muy severa, todavía es posible encontrar soluciones en series de Frobenius. Más adelante haremos estos conceptos un poco más precisos.

5.1 Conceptos básicos de series de potencias

Una serie infinita de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots, \quad (5.1)$$

donde x_0 y los coeficientes $\{a_k\}$ son números dados, se llama una *serie de potencias alrededor del punto x_0* . Definimos la m -ésima *suma parcial* asociada con la serie (5.1) por:

$$s_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x - x_0)^k.$$

Note que s_m es un polinomio de grado a lo más m y por lo tanto está definido para toda x . No obstante, la serie (5.1) no necesariamente está definida para toda x . Decimos que la serie (5.1) *converge* en x (o sea que está definida en x) si el límite:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x),$$

existe. Note que (5.1) siempre converge para $x = x_0$. Si definimos

$$|s_m(x)| = \sum_{k=0}^m |a_k(x - x_0)^k|,$$

entonces decimos que la serie (5.1) *converge absolutamente* en x si:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |s_m(x)|,$$

existe. No es difícil ver que convergencia absoluta implica convergencia pero el converso no es necesariamente cierto.

Usando la prueba de la razón para series de números, es fácil ver que la serie (5.1) converge absolutamente en x si:

$$L \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k(x - x_0)^k} \right| = |x - x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1.$$

Si $L > 1$, entonces la serie diverge en x , y si $L = 1$, la serie lo mismo puede converger que no converger en x .

El *radio de convergencia* de la serie de potencias (5.1) está dado por el número (posiblemente infinito) $\rho \in [0, \infty]$ tal que la serie converge absolutamente para toda x tal que $|x - x_0| < \rho$, y diverge para toda x tal que $|x - x_0| > \rho$. De la definición de L de arriba, tenemos que:

$$\rho = \frac{1}{L} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)^{-1}. \quad (5.2)$$

Note que $\rho = 0$ si la serie converge solo para $x = x_0$, mientras que $\rho = \infty$ si la serie converge para toda x . El intervalo $|x - x_0| < \rho$ se llama el *intervalo de convergencia absoluta* de la serie. En los puntos extremos del intervalo de convergencia absoluta, la serie lo mismo puede converger que no converger.

Ejemplo 5.1. Considere la serie de potencias (alrededor de $x_0 = -1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k2^k}.$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2},$$

tenemos que $\rho = 2$ y el intervalo de convergencia absoluta es $|x + 1| < 2$. Si $x = -3$, la serie reduce a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

que converge (condicionalmente). Para $x = 1$, tenemos que la serie reduce a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

que diverge. Así que la serie converge en el intervalo $[-3, 1)$. □

Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$, entonces f tiene derivadas de todo orden (esto es $f \in C^\infty$), sus derivadas se pueden calcular diferenciando la serie de f término a término, y estas derivadas convergen absolutamente para $|x - x_0| < \rho$. Esto es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

las cuales convergen absolutamente para $|x - x_0| < \rho$.

Ejemplo 5.2. La serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k2^k}.$$

converge (absolutamente) para $|x+1| < 2$. Tenemos entonces que

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{k-1}}{2^k}, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(x+1)^{k-2}}{2^k}, \quad \text{etc.},$$

las cuales convergen (absolutamente) para $|x+1| < 2$. \square

5.2 Puntos ordinarios

Comenzamos el estudio de los métodos de series de potencias para la solución de la ecuación diferencial:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad (5.3)$$

donde a, b, c son funciones continuas en el intervalo (α, β) .

Si para $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tenemos que $a(x_0) \neq 0$, entonces decimos que x_0 es un *punto ordinario* de (5.3). En este caso podemos escribir (5.4) como:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (5.4)$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$ son continuas en un intervalo alrededor de x_0 . El teorema de existencia y unicidad entonces garantiza que existe una solución única para el problema de valor inicial asociado con (5.4) y que dicha solución es válida en un intervalo alrededor de x_0 . En el método de series de potencias, buscamos una representación de ésta solución en una serie de potencias de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k.$$

Mediante un proceso no riguroso de diferenciar ésta serie y sustituir en la ecuación diferencial (5.4), podemos encontrar o determinar los coeficientes de ésta serie. Luego, con estos coeficientes podemos determinar el intervalo de convergencia absoluta de la serie, justificando así los cálculos no rigurosos que demuestran que la serie resultante es una solución de la ecuación diferencial para toda x en dicho intervalo de convergencia.

Ejemplo 5.3. Considere la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0,$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Usando los métodos del Capítulo 3, es fácil ver que la solución general de ésta ecuación está dada por $c_1 \cos x + c_2 \sin x$. No obstante y para ilustrar el método de series, procedemos sin hacer uso de éste dato.

Buscamos una solución de la ecuación dada en términos de una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$. En este caso $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, y $c(x) = 1$, por lo que $x_0 = 0$ es punto ordinario. (De hecho cualquier x_0 es punto ordinario.) Buscamos pues una representación en serie de $y(x)$ de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

De aquí tenemos que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k, \\ y''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k. \end{aligned}$$

Si sustituimos estas series en la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2) a_{k+2} + a_k] x^k = 0.$$

Para que esta serie sea idénticamente cero, es necesario que todos los coeficientes de la misma sean cero, esto es que:

$$(k+1)(k+2) a_{k+2} + a_k = 0, \quad k \geq 0,$$

o lo mismo, que:

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 0.$$

Asignándole sucesivamente los valores de $k = 0, 1, 2, 3$, obtenemos que:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad a_5 = \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Usando inducción matemática, podemos concluir que:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \quad k \geq 0.$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie de $y(x)$ tenemos que:

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Es fácil verificar ahora que las series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

convergen absolutamente para toda x por lo que la serie anterior para $y(x)$ converge absolutamente para toda x y es solución de la ecuación diferencial para toda x . En este caso podemos reconocer estas dos series como las series de Taylor alrededor de cero de \cos y \sin respectivamente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

lo que enlaza el método de series exactamente con los resultados o métodos del Capítulo 3 en este ejemplo. \square

Ejemplo 5.4. Veamos ahora el caso de la ecuación diferencial:

$$y'' - xy' - y = 0.$$

Igual al ejemplo anterior, cualquier x_0 es punto ordinario para esta ecuación. Para ilustrar el método con un x_0 distinto de cero, busquemos una solución en serie alrededor del punto ordinario $x_0 = 1$. Tenemos pues con:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k,$$

que

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-1)^k, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} (x-1)^k.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}(x-1)^k - x \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-1)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-1)^k = 0.$$

Si escribimos el coeficiente de la serie del medio como $x = 1 + (x-1)$, que es la serie de potencias de x alrededor de $x_0 = 1$, la expresión anterior reduce entonces a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)((k+2)a_{k+2} - a_{k+1}) - a_k] (x-1)^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-1)^{k+1} = 0.$$

Note que la segunda serie en esta ecuación se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-1)^k.$$

Sustituyendo en la serie anterior llegamos a que:

$$2a_2 - a_1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)[(k+2)a_{k+2} - a_{k+1} - a_k](x-1)^k = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de todas las potencias de $(x-1)^k$, obtenemos que:

$$2a_2 - a_1 - a_0 = 0, \quad (k+2)a_{k+2} - a_{k+1} - a_k = 0, \quad k \geq 1,$$

o lo mismo que:

$$a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{k+2}, \quad k \geq 0.$$

Tomamos primero el caso en que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. De la recursión anterior tenemos entonces que:

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{6}, \quad a_5 = \frac{1}{15}, \quad a_6 = \frac{7}{180}, \quad \text{etc.}$$

De aquí que:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 \\ &\quad + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^5 + \frac{7}{180}(x-1)^6 + \dots, \end{aligned}$$

es una solución en serie de la ecuación diferencial dada. Tomando ahora $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ en la recursión de los a_k 's, tenemos que:

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{3}{20}, \quad a_6 = \frac{1}{15}, \quad \text{etc.},$$

por lo que otra solución en serie de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} y_2(x) = & (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 \\ & + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{3}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{15}(x-1)^6 + \dots \end{aligned}$$

Note que no es posible encontrar una constante c tal que $y_2(x) = cy_1(x)$ para toda x , lo que implica que $\{y_1, y_2\}$ forma un conjunto fundamental para la ecuación diferencial dada. Como no tenemos la forma general de los coeficientes, no podemos determinar el intervalo de convergencia de éstas series directamente. No obstante usando el Teorema 5.5, es posible concluir que ambas series convergen absolutamente para toda x . \square

Los ejemplos que hemos visto hasta el momento muestran el proceso para determinar los coeficientes de una solución en serie de potencias cuando este tipo de solución existe. El siguiente teorema nos da condiciones bajo las cuales éste tipo de soluciones son posibles y también nos da información sobre el intervalo de convergencia de dicha series.

Teorema 5.5. *Suponga que x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (5.3), y que*

$$\begin{aligned} \frac{b(x)}{a(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < \rho_1, \\ \frac{c(x)}{a(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < \rho_2. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial (5.3) tiene una solución en serie de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

que converge absolutamente para $|x-x_0| < \rho$ donde $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ y las constantes a_0, a_1 son arbitrarias. Además es posible escribir que

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

donde $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$ y y_1, y_2 tienen series de potencias alrededor de x_0 que convergen absolutamente para $|x - x_0| < \rho$.

Note que la solución en serie $y(x)$ del teorema podría converger (absolutamente) para valores de x fuera de $|x - x_0| < \rho$. El valor de ρ en el teorema es un cota inferior del radio de convergencia de dicha serie. En el caso especial en que $\rho = \infty$, ambos coinciden, esto es, el radio de convergencia de la serie es infinito.

Un caso especial importante del teorema anterior es cuando a, b, c son polinomios sin factores comunes. En este caso la serie $y(x)$ del teorema converge para $|x - x_0| < \rho$ donde $\rho = \infty$ si $a(x) = \text{constante}$ (no cero) o:

$$\rho = \min \{ |x_0 - r_j| : 1 \leq j \leq m \},$$

donde el grado de $a(x)$ es m y r_1, r_2, \dots, r_m son las raíces (complejas) de $a(x)$.

Ejemplo 5.6. Las ecuaciones de los Ejemplos 5.3 y 5.4 tienen ambas coeficientes polinomiales con $a(x)$ constante, por lo que $\rho = \infty$ en ambos casos.

En la ecuación diferencial:

$$(x^3 + 1)y'' + xy' + y = 0,$$

tenemos que $a(x) = x^3 + 1$. Las raíces complejas de $a(x)$ son (Teorema A.3):

$$r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad r_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Si $x_0 = 0$, entonces el radio de convergencia de una solución en serie de potencias alrededor de x_0 es $\rho = 1$, ya que las tres raíces tiene modulo uno. Por el contrario si $x_0 = 3$, entonces el radio de convergencia de una solución en serie de potencias alrededor de x_0 sería:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7},$$

ya que r_2, r_3 son las raíces más cerca de $x_0 = 3$, ambas a la misma distancia. \square

El siguiente ejemplo muestra una aplicación del Teorema 5.5 en el caso que los coeficientes de la ecuación diferencial no son necesariamente polinomios.

Ejemplo 5.7. La ecuación diferencial:

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

tiene $a(x) = 1$ (por lo que cualquier x_0 es punto ordinario), $b(x) = \operatorname{sen} x$, y $c(x) = 1 + x^2$. Tomando $x_0 = 0$, tenemos que:

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \frac{c(x)}{a(x)} = 1 + x^2,$$

donde ambas series son convergentes para toda x . Por el Teorema 5.5, la ecuación diferencial dada tiene una solución en serie de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

que converge para toda x . Vamos ahora a determinar los primeros tres o cuatro términos de dicha serie. Diferenciando la serie anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots, \\ y''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas series y la de $\operatorname{sen} x$ en la ecuación diferencial tenemos ahora que:

$$\begin{aligned} 0 &= (2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots) \\ &+ \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots) \\ &+ (1 + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &= 2a_2 + a_0 + (6a_3 + 2a_1)x \\ &+ (12a_4 + 3a_2 + a_0)x^2 + (20a_5 + 4a_3 + \frac{5}{6}a_1)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las primeras cuatro potencias de x obtenemos que:

$$\begin{aligned} 2a_2 + a_0 &= 0, \\ 6a_3 + 2a_1 &= 0, \\ 12a_4 + 3a_2 + a_0 &= 0, \\ 20a_5 + 4a_3 + \frac{5}{6}a_1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones tenemos que:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \quad a_4 = \frac{1}{24}a_0, \quad a_5 = \frac{1}{40}a_1.$$

Sustituyendo en la serie de $y(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \dots\right). \end{aligned}$$

Ambas series son convergentes para toda x ya que las series de potencias de los coeficientes b/a y c/a son convergentes para toda x . \square

5.3 Puntos singulares regulares

Si el número x_0 es tal que $a(x_0) = 0$ en la ecuación (5.3), entonces decimos que $x = x_0$ es un *punto singular*. El estudio de soluciones de una ecuación diferencial alrededor de un punto singular es de gran importancia ya que usualmente alrededor de estos puntos es que la solución de la ecuación diferencial tiene el comportamiento más importante en el contexto del problema real que describe dicha ecuación. Además es común en problemas de aplicaciones, que las condiciones iniciales o de frontera estén especificadas en puntos singulares. Por ejemplo, los puntos singulares ocurren naturalmente en problemas de mecánica que envuelven geometrías circulares, cilíndricas, sectores de cilindros, o problemas donde se quiere modelar fracturas o rajaduras en estructuras mecánicas.

Para poder estudiar los puntos singulares de una ecuación diferencial, es necesario caracterizar el grado o tipo de singularidad de la ecuación en dicho punto. En particular, decimos que $x = x_0$ es un punto *singular regular* de la ecuación diferencial (5.3) si $a(x_0) = 0$ y los límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x)}{a(x)} (x - x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x)}{a(x)} (x - x_0)^2,$$

ambos existen (como números reales). Esta condición lo que implica es que las singularidades en b/a y c/a no son peores o más severas que $(x - x_0)^{-1}$ y $(x - x_0)^{-2}$ respectivamente. Cualquier otro tipo de punto singular se denomina *irregular*.

Ejemplo 5.8. La ecuación diferencial:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, se le conoce como la *ecuación de Legendre*. Note que $x_0 = \pm 1$ son puntos singulares de la ecuación. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x)}{a(x)}(x - x_0) &= \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{-2x}{1 - x^2}(x \mp 1) = \pm 1, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x)}{a(x)}(x - x_0)^2 &= \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}(x \mp 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

ambos puntos son singulares regulares para la ecuación diferencial. \square

Ejemplo 5.9. La ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

donde $p \in \mathbb{R}$, se llama la *ecuación de Bessel de orden p* . Esta ecuación tiene a $x_0 = 0$ como punto singular. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x)}{a(x)}(x - x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x)}{a(x)}(x - x_0)^2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - p^2}{x^2}x^2 = -p^2, \end{aligned}$$

tenemos que $x_0 = 0$ es un punto singular regular para dicha ecuación. \square

Ejemplo 5.10. La ecuación diferencial:

$$x(x - 2)^2y'' + 3xy' + (x - 2)y = 0,$$

tiene a $x_0 = 0, 2$ como puntos singulares. Es fácil verificar que $x_0 = 0$ es regular. Para $x_0 = 2$ tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x)}{a(x)}(x - x_0) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x(x - 2)^2}(x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}.$$

Como este límite no existe, tenemos que el punto $x_0 = 2$ es singular irregular. \square

5.3.1 Ecuación de Euler–Cauchy

El ejemplo más simple de una ecuación diferencial con un punto singular regular esta dado por la siguiente ecuación:

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0, \quad (5.5)$$

donde α, β son números reales dados. Esta ecuación se conoce como la *ecuación equidimensional de Euler–Cauchy*. Es fácil ver que $x = x_0$ es un punto singular regular de esta ecuación. La ecuación (5.5) es importante ya que en cierto sentido, el comportamiento de todas las soluciones de una ecuación diferencial cualquiera cerca de un punto singular regular, es igual al de las soluciones de una cierta ecuación de Euler–Cauchy.

Para resolver (5.5) buscamos soluciones de la forma $y = (x - x_0)^r$ para algún r . Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando, encontramos que r tiene que ser solución de la ecuación característica:

$$r(r - 1) + \alpha r + \beta = 0. \quad (5.6)$$

Hay tres casos dependiendo del tipo de soluciones de esta ecuación.

1. Si las soluciones r_1, r_2 de (5.6) son reales y distintas, entonces la solución general de (5.5) está dada por:

$$y(x) = c_1(x - x_0)^{r_1} + c_2(x - x_0)^{r_2}.$$

2. Si las soluciones son iguales, $r = r_1 = r_2$, entonces tenemos una solución de la forma $(x - x_0)^r$. Usando el método de reducción de orden se puede construir otra solución de la forma $v(x)(x - x_0)^r$. Trabajando las ecuaciones correspondientes, se obtiene que $v(x) = \ln(x - x_0)$. La solución general de (5.5) en este caso es:

$$y(x) = (x - x_0)^r (c_1 + c_2 \ln(x - x_0)), \quad x > x_0.$$

Para $x < x_0$ se utiliza $\ln(x_0 - x)$ para el termino logarítmico.

3. Si las raíces r_1, r_2 son complejas con $r_1, r_2 = \lambda \pm \mu i$. entonces ambas $(x - x_0)^{r_1}, (x - x_0)^{r_2}$ son soluciones de (5.5). Note que

$$\begin{aligned} (x - x_0)^{r_1} &= e^{r_1 \ln(x - x_0)} \\ &= e^{\lambda \ln(x - x_0)} \cdot e^{i\mu \ln(x - x_0)} \\ &= (x - x_0)^\lambda (\cos(\mu \ln(x - x_0)) + i \operatorname{sen}(\mu \ln(x - x_0))). \end{aligned}$$

Trabajando igual con $(x - x_0)^{r_2}$ y usando el principio de superposición, tenemos que la solución general de la ecuación (5.5) está dada por:

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda (c_1 \cos(\mu \ln(x - x_0)) + c_2 \operatorname{sen}(\mu \ln(x - x_0))), \quad x > x_0.$$

Para $x < x_0$ los términos logarítmicos se remplazan con $\ln(x_0 - x)$.

Ejemplo 5.11. Considere la ecuación diferencial:

$$(x - 1)^2 y'' + 2(x - 1)y' + y = 0, \quad x > 1.$$

Esto es una ecuación de Euler–Cauchy con $x_0 = 1$ y la ecuación característica asociada es:

$$r(r - 1) + 2r + 1 = 0,$$

o lo mismo, $r^2 + r + 1 = 0$. Tenemos pues que

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(1, \infty)$ es:

$$y(x) = (x - 1)^{-1/2} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x - 1)\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x - 1)\right) \right].$$

□

Ejemplo 5.12. La ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0,$$

es una ecuación de Euler–Cauchy con $x_0 = 0$ y ecuación característica:

$$r(r - 1) + 3r + 1 = 0,$$

o lo mismo, $(r + 1)^2 = 0$. Así que $r = -1$ es raíz doble. La solución general de la ecuación en el intervalo $(0, \infty)$ es:

$$y(x) = x^{-1} (c_1 + c_2 \ln x).$$

□

Ejemplo 5.13. Considere la ecuación diferencial:

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x < 0.$$

La ecuación característica reduce a $(r - 1)^2 = 0$, por lo que $r = 1$ es raíz doble. La solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, 0)$ es:

$$y(x) = x(c_1 + c_2 \ln(-x)).$$

□

5.3.2 Caso general

Volvemos ahora al caso general de la ecuación diferencial (5.3). Recuerde que x_0 es punto singular regular de ésta ecuación si $a(x_0) = 0$ y los límites:

$$\alpha_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x)}{a(x)} (x - x_0), \quad \beta_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x)}{a(x)} (x - x_0)^2, \quad (5.7)$$

ambos existen como números reales. Si escribimos (5.3) como:

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) \left[\frac{b(x)}{a(x)} (x - x_0) \right] y' + \left[\frac{c(x)}{a(x)} (x - x_0)^2 \right] y = 0, \quad (5.8)$$

entonces es razonable pensar que si (5.7) se cumple, las soluciones de (5.8) deben de “comportarse” como las de la ecuación auxiliar:

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha_0 (x - x_0) y' + \beta_0 y = 0, \quad (5.9)$$

al menos “cerca” de x_0 . Las soluciones de ésta última ecuación son de la forma $(x - x_0)^r$ donde r satisface la *ecuación indicial*:

$$F(r) \equiv r(r - 1) + \alpha_0 r + \beta_0 = 0. \quad (5.10)$$

Motivados por este argumento heurístico, proponemos buscar soluciones de (5.3), o lo mismo (5.8), de la forma:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \quad (5.11)$$

El término $(x - x_0)^r$ en esta expresión “corresponde” al comportamiento de $y(x)$ cerca de x_0 que debe estar dado por las soluciones de (5.9), mientras

que la serie en la expresión de $y(x)$ toma en cuenta o corrige por la diferencia entre las soluciones de (5.3) y (5.9) “lejos” de x_0 . El exponente r se llama *el exponente de la singularidad* en $x = x_0$.

Por el momento vamos a suponer que las soluciones $y(x)$ de (5.3) son de la forma (5.11) para entonces mostrar con un ejemplo como se determinan el exponente r y los coeficientes de la serie.

Ejemplo 5.14. El número $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

Buscamos una solución de ésta ecuación de la forma (5.11). Como:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2},$$

tenemos, sustituyendo en la ecuación diferencial que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2(k+r) - 1)(k+r-1)a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k+r},$$

podemos escribir la ecuación anterior como:

$$F(r)a_0 x^r + \sum_{k=1}^{\infty} [F(k+r)a_k + a_{k-1}] x^{k+r} = 0,$$

donde

$$F(r) = (2r-1)(r-1).$$

Igualando el coeficiente de a_0 a cero tenemos que $r = 1/2, 1$. Igualando los otros coeficientes a cero obtenemos la recursión:

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{F(k+r)}, \quad k \geq 1.$$

Para el caso $r = 1/2$, la recursión anterior reduce a:

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{k(2k-1)}, \quad k \geq 1.$$

Usando inducción es fácil ver que esta recursión lleva a que:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1))}, \quad k \geq 1,$$

donde hemos tomado $a_0 = 1$, lo que nos da la solución:

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1))} \right].$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = 0,$$

tenemos que la serie en $y_1(x)$ converge para toda x .

Para el caso $r = 1$, la recursión para los a_k 's reduce a:

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{k(2k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Nuevamente, usando inducción y tomando $a_0 = 1$, se puede ver que la solución de ésta recursión es:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1))}, \quad k \geq 1.$$

Tenemos entonces una segunda solución dada por:

$$y_2(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1))}.$$

La serie en $y_2(x)$ converge para toda x y como y_2 no es proporcional a y_1 , entonces $\{y_1, y_2\}$ forma un conjunto fundamental y la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(0, \infty)$ es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

□

El método del ejemplo anterior se llama el *método de Frobenius* y a (5.11) se le llama una *serie de Frobenius*. Del ejemplo podemos ver que el método puede fallar en dar dos soluciones de la ecuación diferencial si las

raíces de la ecuación indicial (5.10) son iguales, o si las raíces difieren por un entero distinto de cero. Esto último se debe a que en general, el método produce una recursión para los coeficientes de la serie de la forma:

$$F(k+r)a_k = \sum_{j=1}^m \gamma_j a_{k-j}, \quad k \geq 1.$$

Si $r_1 - r_2 = N$ donde N es un entero positivo, entonces $F(N+r_2) = 0$ y no se podrá determinar el valor de a_N en la serie correspondiente a r_2 . (La que corresponde a r_1 si se puede calcular completamente.) Aunque hay casos donde se puede asignar un valor a a_N y continuar el proceso, en general esto no es posible y el método falla en dar una segunda solución. No obstante, tanto en este caso como en el de la raíz doble, es posible conseguir una segunda solución de la forma:

$$y(x) = y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k,$$

donde $y_1(x)$ es la solución en serie de Frobenius correspondiente a r_1 .

Ejemplo 5.15. La ecuación diferencial:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, tiene a $x_0 = \pm 1$ como puntos singulares regulares. Para $x_0 = 1$ buscamos una solución en serie de Frobenius de la forma:

$$y(x) = (x-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k.$$

Como

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(x-1)^{k+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1)(x-1)^{k+r-2}, \end{aligned}$$

y escribiendo:

$$1-x^2 = -2(x-1) - (x-1)^2, \quad -2x = -2 - 2(x-1),$$

tenemos luego de sustituir en la ecuación diferencial y simplificar que:

$$2a_0F(r) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(2F(k+r+1)a_{k+1} + [(k+r)(k+r+1) - \alpha(\alpha+1)]a_k \right) (x-1)^{k+r} = 0,$$

donde $F(r) = r^2$. Tomando $a_0 = 1$ tenemos que $r = 0$ es raíz doble de la ecuación indicial. Los restantes coeficientes están dados ahora por la recursión:

$$a_{k+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) - k(k+1)}{2(k+1)^2} a_k, \quad k \geq 0. \quad (5.12)$$

Note que si $\alpha = N$, un entero no negativo, entonces $a_{N+j} = 0$ para toda $j \geq 1$ por lo que la serie de $y_1(x)$ es finita, y no hay singularidad ya que $r = 0$. Los polinomios que resultan se llaman los *polinomios de Legendre*. Los primeros cuatro polinomios de Legendre son:

$$1, \quad x, \quad 1 + 3(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2, \quad 1 + 6(x-1) + \frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Si $\alpha < 0$ ó positivo pero no entero, entonces la recursión de arriba nos da que:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k (k!)^2} \prod_{j=1}^k ((j-1)j - \alpha(\alpha+1)), \quad k \geq 1.$$

La serie de $y_1(x)$ queda ahora como:

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)(2-\alpha(\alpha+1))}{16}(x-1)^2 + \dots$$

Usando (5.12) es fácil ver que esta serie converge absolutamente para $|x-1| < 2$.

Buscamos ahora una segunda solución de la ecuación diferencial de la forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x-1) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-1)^k. \quad (5.13)$$

Diferenciando tenemos que:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \frac{y_1(x)}{x-1} + y_1'(x) \ln(x-1) + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (x-1)^{k-1}, \\ y_2''(x) &= -\frac{y_1(x)}{(x-1)^2} + 2\frac{y_1'(x)}{x-1} + y_1''(x) \ln(x-1) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)b_k(x-1)^{k-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial, usando que y_1 es solución, y simplificando, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [-2(k+1)^2 b_{k+1} + (\alpha(\alpha+1) - k(k+1))b_k] (x-1)^k \\ = y_1(x) + 2(1+x)y_1'(x). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como $r = 0$, tenemos que

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k,$$

donde los a_k 's están dados por (5.12) y $a_0 = 1$. Usando esto es fácil ver ahora que

$$y_1(x) + 2(1+x)y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(1+2k)a_k + 4(k+1)a_{k+1}] (x-1)^k.$$

Sustituyendo este resultado en (5.14) e igualando los coeficientes de las potencias de $x-1$ en ambos lados, llegamos a que:

$$\begin{aligned} -2(k+1)^2 b_{k+1} + (\alpha(\alpha+1) - k(k+1))b_k \\ = (1+2k)a_k + 4(k+1)a_{k+1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Con esta recursión podemos determinar los b_k 's a partir de los a_k 's. Por ejemplo, en el caso en que $\alpha = 0$, lo que implica que $a_0 = 1$ y $a_k = 0$ para $k \geq 1$, obtenemos que b_0 es arbitrario, $b_1 = -\frac{1}{2}$, y que

$$b_{k+1} = -\frac{k}{2(k+1)} b_k, \quad k \geq 1.$$

Para $\alpha = 1$ (donde $a_0 = a_1 = 1$ y $a_k = 0$ para $k \geq 2$), obtenemos con $b_0 = 0$ que $b_1 = -\frac{5}{2}$, $b_2 = -\frac{3}{8}$, y que

$$b_{k+1} = -\frac{2 - k(k+1)}{2(k+1)^2} b_k, \quad k \geq 2.$$

En ambos casos, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k$ que aparece en (5.12), converge absolutamente para $|x-1| < 2$. \square

Los ejemplos dados hasta el momento son casos especiales del siguiente resultado.

Teorema 5.16. *Suponga que $x = x_0$ es punto singular regular de la ecuación diferencial (5.3) y que r_1, r_2 son las raíces de la ecuación indicial (5.10). Suponga que*

$$\frac{b(x)}{a(x)}(x-x_0), \quad \frac{c(x)}{a(x)}(x-x_0)^2,$$

tienen series de potencias alrededor de $x = x_0$ las cuales son convergentes para $|x-x_0| < R$. Entonces si $r_2 \leq r_1$, la ecuación (5.3) admite una solución de la forma

$$y_1(x) = (x-x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

donde la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge para $|x-x_0| < R$. Si $r_1 - r_2$ no es un entero no negativo, entonces la ecuación (5.3) admite una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k,$$

donde la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ converge para $|x-x_0| < R$. Si $r_1 - r_2$ es un entero no negativo, entonces la segunda solución $y_2(x)$ de (5.3), es de la forma

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k,$$

para alguna constante a , donde la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ converge para $|x-x_0| < R$.

5.4 La ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel de orden $p \geq 0$, $p \in \mathbb{R}$, está dada por:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0. \quad (5.16)$$

El punto $x_0 = 0$ es un punto singular regular por lo que buscamos una solución por el método de Frobenius de la forma:

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}. \quad (5.17)$$

Calculando la primera y segunda derivadas de ésta serie, y luego de sustituir en (5.16) obtenemos que:

$$(r^2 - p^2)a_0 x^r + ((r+1)^2 - p^2)a_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [((r+k)^2 - p^2)a_k + a_{k-2}] x^{r+k} = 0.$$

Tomando $a_0 \neq 0$, tenemos que $r = \pm p$, $a_1 = 0$, y que:

$$((r+k)^2 - p^2)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2.$$

Para el caso en que $r = p$, tenemos que esta recursión reduce a:

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(k+2p)}, \quad k \geq 2.$$

Como $a_1 = 0$ tenemos que $a_k = 0$ para toda k impar. Para los índices pares, la recursión anterior nos da que:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(1+p)(2+p) \cdots (k+p) 2^{2k} k!}, \quad k \geq 1. \quad (5.18)$$

Pausamos un momento para introducir la *función Gamma*.

La función Gamma se define por la integral:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0. \quad (5.19)$$

Note que este integral converge para todo $p > 0$ por lo que Γ está bien definida. Usando integración por partes se puede verificar que:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (5.20)$$

De la definición de Γ se obtiene que $\Gamma(1) = 1$. Usando ahora la recursión (5.20) tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2 \Gamma(2) = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3 \Gamma(3) = 3!, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

De aquí se obtiene que:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.21)$$

Esto motiva a definir el factorial del número real $p > 0$ por:

$$p! = \Gamma(p+1). \quad (5.22)$$

Volvemos ahora a la recursión (5.18). Es fácil ver que:

$$\Gamma(p+k+1) = (1+p)(2+p) \cdots (k+p)\Gamma(p+1),$$

por lo que podemos escribir (5.18) como:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(p+1)}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)} a_0, \quad k \geq 1.$$

Sustituyendo en (5.17) tenemos que:

$$y(x) = a_0 x^p \Gamma(p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)},$$

obtenemos la *función de Bessel de orden p del primer tipo*:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (5.23)$$

En la Figura 5.1 mostramos las gráficas de J_p para $p = 0, 1, 2$.

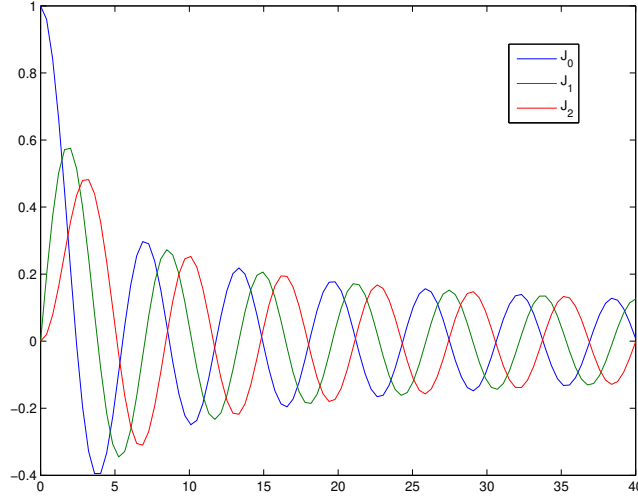


Figura 5.1: Gráficas de las funciones de Bessel del primer tipo y de ordenes $p = 0, 1, 2$.

La función de Bessel del segundo tipo de orden p se define por:

$$Y_p(x) = \begin{cases} J_{-p}(x), & p \neq \text{entero}, \\ \lim_{q \rightarrow p} \left[\frac{(\cos q\pi)J_q(x) - J_{-q}(x)}{\text{sen } q\pi} \right], & p = \text{entero}. \end{cases} \quad (5.24)$$

Se puede verificar que el limite en esta ecuación para el caso p entero existe para toda $x > 0$, que la función resultante es una solución de la ecuación (5.16), y que $\{J_p, Y_p\}$ es un conjunto fundamental. En la Figura 5.2 mostramos las gráficas de Y_p para $p = 0, 1, 2$.

5.4.1 Algunas propiedades de las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel tienen una gran cantidad de propiedades. A continuación enumeramos solo algunas de las más importantes. En la discusión utilizaremos la siguiente notación. Para cualquier $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, y funciones $f(s)$ y $g(s)$, la notación:

$$f(s) \sim g(s), \quad s \rightarrow a,$$

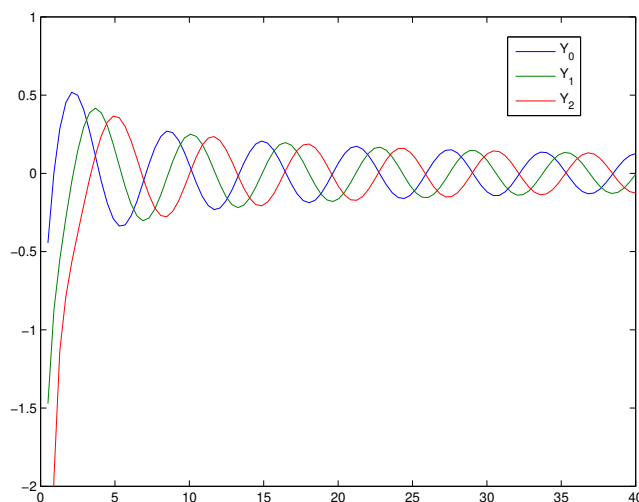


Figura 5.2: Gráficas de las funciones de Bessel del segundo tipo y de ordenes $p = 0, 1, 2$.

representa que:

$$\lim_{s \rightarrow a} \frac{f(s)}{g(s)} = 1.$$

Decimos que $f(s)$ tiene el mismo comportamiento asintótico que $g(s)$ según $s \rightarrow a$.

Propiedades asintóticas

Las funciones de Bessel tienen el siguiente comportamiento asintótico para x cerca de cero:

$$J_p(x) \sim c_1 x^p, \quad x \rightarrow 0^+,$$

$$Y_p(x) \sim \begin{cases} -c_2 x^{-p}, & x \rightarrow 0^+, \quad p > 0, \\ c_3 \ln x, & x \rightarrow 0^+, \quad p = 0, \end{cases}$$

donde los c_i 's son constantes positivas. En particular, note que Y_p es no acotada (tiene una singularidad) en $x = 0$. También tenemos las representa-

ciones para x grande:

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{3/2}},$$

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/2}},$$

donde r_1, r_2 son acotadas según $x \rightarrow \infty$. De aquí se obtiene que

$$J_p(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$Y_p(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Propiedades diferenciales e integrales

Se puede verificar que

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), \quad (5.25a)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \quad (5.25b)$$

En particular

$$\frac{d}{dx} [J_0(x)] = -J_1(x), \quad \frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x).$$

Si integramos las primeras formulas de arriba, obtenemos las correspondientes formulas para integrales

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x) + C, \quad (5.26a)$$

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x) dx = -x^{-p} J_p(x) + C. \quad (5.26b)$$

Los ceros de las funciones de Bessel

Se puede verificar que la ecuación

$$J_p(x) = 0,$$

tiene un numero infinito de soluciones positivas $\{\lambda_{k,p}\}_{k=1}^{\infty}$ las cuales se conocen como los *ceros de la función de Bessel* de orden p del primer tipo. Estos ceros o raíces tienen las siguientes propiedades:

- i) $0 < \lambda_{1,p} < \lambda_{2,p} < \lambda_{3,p} < \dots$
- ii) $\lambda_{1,p} < \lambda_{1,p+1} < \lambda_{2,p} < \lambda_{2,p+1} < \dots$
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k,p} = \infty$.

Por ejemplo, los primeros cinco ceros de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ son aproximadamente

$$\begin{array}{cccccc} 2.4048, & 5.5201, & 8.6537, & 11.7915, & 14.9309, & \\ 3.8317, & 7.0156, & 10.1735, & 13.3237, & 16.4706, & \end{array}$$

respectivamente. El estudio de las propiedades de los ceros de las funciones de Bessel es de suma importancia, en particular para la construcción de las llamadas series de Bessel que veremos a continuación.

5.4.2 Series de Bessel

Para simplificar la notación en esta sección, escribiremos λ_k en lugar de $\lambda_{k,p}$. Para cualquier $p \geq 0$ definimos las funciones $\{\psi_k(x)\}$ por

$$\psi_k(x) = J_p(\lambda_k x), \quad k \geq 1.$$

Nos interesa estudiar bajo que condiciones, una función $f(x)$ cualquiera y definida en $[0, 1]$, puede representarse por una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x). \quad (5.27)$$

Antes de contestar esta pregunta vamos a necesitar una propiedad bien importante de las funciones $\{\psi_k(x)\}$, llamada la *propiedad de ortogonalidad*.

Lema 5.17.

$$\int_0^1 x \psi_k(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq m, \\ \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda_k) & , \quad k = m. \end{cases}$$

Demostración: Usando (5.16) es fácil ver que $\psi_k(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(\lambda_k^2 - \frac{p^2}{x^2} \right) y(x) = 0.$$

($\psi_m(x)$ satisface una ecuación similar cambiando el λ_k^2 por λ_m^2 .) Si multiplicamos la ecuación de $\psi_k(x)$ por $\psi_m(x)$, y la ecuación de $\psi_m(x)$ por $\psi_k(x)$, y luego restamos las ecuaciones resultantes, llegamos a que

$$\frac{d}{dx} (\psi'_k \psi_m - \psi'_m \psi_k) + \frac{1}{x} (\psi'_k \psi_m - \psi'_m \psi_k) + (\lambda_k^2 - \lambda_m^2) \psi_k \psi_m = 0.$$

Ahora si multiplicamos esta ecuación por x e integramos de 0 a 1, obtenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 - \lambda_k^2) \int_0^1 x \psi_k(x) \psi_m(x) dx &= x (\psi'_k \psi_m - \psi'_m \psi_k) \Big|_0^1 \\ &= \lambda_k J'_p(\lambda_k) J_p(\lambda_m) - \lambda_m J'_m(\lambda_m) J_p(\lambda_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde usamos que $J_p(\lambda_k) = J_p(\lambda_m) = 0$. Si $k \neq m$, entonces $\lambda_k \neq \lambda_m$ y obtenemos de la ecuación anterior que

$$\int_0^1 x \psi_k(x) \psi_m(x) dx = 0, \quad k \neq m.$$

Cuando $k = m$, multiplicamos la ecuación de $\psi_k(x)$ por $2x^2 \psi'_k(x)$, y luego de arreglar obtenemos que

$$\frac{d}{dx} [x^2 (\psi'_k)^2 + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) \psi_k^2] = 2\lambda_k^2 x \psi_k^2.$$

Ahora integrando esta ecuación de cero a uno, usando (5.25b), que $\psi_k(1) = 0$ y $\psi_k(0) = 0$ para $p > 0$, tenemos que

$$\int_0^1 x \psi_k^2(x) dx = \frac{(\psi'_k(1))^2}{2\lambda_k^2} = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda_k).$$

□

Usando la propiedad de ortogonalidad del Lema 5.17, tenemos que si $f(x)$ se puede expresar por una serie de la forma (5.27), entonces operando formalmente obtenemos que

$$\int_0^1 x f(x) \psi_m(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x \psi_k(x) \psi_m(x) dx = a_m \int_0^1 x \psi_m^2(x) dx,$$

es decir

$$a_m = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_m)} \int_0^1 x f(x) \psi_m(x) dx, \quad m \geq 1. \quad (5.28)$$

A la serie (5.27) con los coeficientes dados por (5.28) se le llama una *serie de Bessel*. El siguiente resultado nos da condiciones suficientes para la convergencia de dicha serie.

Teorema 5.18. *Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que f' es continua por pedazos. Entonces la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_p(\lambda_k x),$$

donde los a_k 's están dados por (5.28), converge a $f(x)$ para toda $x \in (0, 1)$. Si $p = 0$, la serie converge a $f(x)$ para toda $x \in [0, 1)$.

Ejemplo 5.19. Consideramos el caso en que $f(x) = 1$ para $x \in [0, 1]$. Tomamos el caso en que $p = 0$ y los $\{\lambda_k\}$ son los ceros de J_0 . Entonces

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x J_0(\lambda_k x) dx, \\ &= \frac{2}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k)} x J_1(\lambda_k x) \Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{\lambda_k J_1(\lambda_k)}, \end{aligned}$$

donde usamos (5.26a) con $p = 1$. De acuerdo al Teorema 5.27 tenemos entonces que

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} J_0(\lambda_k x), \quad 0 \leq x < 1.$$

□

5.5 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Clasifique el punto $x_0 = -1$ como ordinario, singular regular, o singular irregular para las siguientes ecuaciones. Explique o justifique sus contestaciones.

a) $2x^4(1 - x^2)y'' + 2xy' + 3x^2y = 0$

b) $(x + 3)y'' - 2(x + 1)y' + (1 - x^2)y = 0$

Ejercicio 5.2. Sin buscar las soluciones en serie de potencias, determine el radio de convergencia para una solución de la forma $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - 1)^k$ de la siguiente ecuación diferencial:

$$(x + 1)(x - 5)y'' + x^3y' + (\cos(x))y = 0.$$

Ejercicio 5.3. Sin buscar las soluciones en serie de potencias alrededor de los puntos x_0 dados, determine el radio de convergencia para dichas soluciones en serie para las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $(x^2 + x - 12)y'' + (x^2 - 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = -5, 0, 6.$

b) $(x^2 - 2x - 3)y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = 0, \quad x_0 = -4, 0, 4.$

c) $(x^2 + 1)y''(x) + x^2y'(x) + 3xy(x) = 0, \quad x_0 = -1, 3.$

Ejercicio 5.4. Suponga que

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$, donde $\rho > 0$. Verifique diferenciando la serie término a término, evaluando en $x = x_0$, y mediante inducción matemática, que

$$a_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0), \quad k \geq 0. \quad (5.29)$$

Ejercicio 5.5. Considere el problema de valor inicial:

$$x^2y''(x) + (1 + x)y'(x) + 3(\ln x)y(x) = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

Si $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - 1)^k$ es una solución en serie de dicha ecuación, use la propiedad (5.29) para encontrar los primeros cuatro términos de dicha solución en serie, esto es, calcule a_0, a_1, a_2, a_3 . ¿Cuál es el intervalo de convergencia de dicha serie? Explique.

Ejercicio 5.6. Considere el problema de valor inicial:

$$y''(x) + xy'(x) + e^x y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$$

Si $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ es una solución en serie de dicha ecuación, use la propiedad (5.29) para encontrar los primeros cuatro términos de dicha solución en serie, esto es, calcule a_0, a_1, a_2, a_3 . ¿Cuál es el intervalo de convergencia de dicha serie? Explique.

Ejercicio 5.7. Halle dos soluciones en series de potencias alrededor de $x_0 = 0$ para las siguientes ecuaciones diferenciales:

- a) $y'' + xy = 0$.
- b) $y'' - xy' - y = 0$.
- c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Ejercicio 5.8. Verifique que la ecuación

$$3x^2y''(x) + 2xy'(x) + x^2y(x) = 0,$$

tiene un punto regular singular en $x_0 = 0$. Luego determine, si es posible, dos soluciones con sus respectivas representaciones en series para $x > 0$.

Ejercicio 5.9. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones de tipo Euler–Cauchy:

- a) $(x - 1)^2y'' + 8(x - 1)y' + 12y = 0$.
- b) $(x - 2)^2y'' + 5(x - 2)y' + 4y = 0$.
- c) $2(x - 3)^2y'' + 3(x - 3)y' - y = 0, \quad x > 3$.

Ejercicio 5.10. Halle al menos una solución en serie de Frobenius alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$ para las siguientes ecuaciones diferenciales:

- a) $xy'' + y' - y = 0$.
- b) $xy'' + y = 0$.
- c) $xy'' + xy' + 2y = 0$.
- d) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.

Ejercicio 5.11. Usando integración por partes verifique que la función Gamma definida por (5.19), satisface la recursión (5.20).

Ejercicio 5.12. Para la ecuación de Bessel (5.16), verifique que la función de Bessel J_p (cf. (5.23)) satisface las siguientes identidades:

- a) $J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$.

b) $J'_p(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x).$

c) $\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x).$ **Ayuda:** Expanda el lado izquierdo y use las partes (a) y (b).

d) $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x),$ para p entero.

Ejercicio 5.13. Usando las propiedades (5.25) verifique la identidad

$$J'_p(x) = \frac{1}{2} [J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)].$$

Ejercicio 5.14. Verifique que

$$\frac{d}{dp} J_p(x) = J_p(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma'(p+k+1)}{\Gamma(p+k+1)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

En el caso en que p es un entero, verifique que esta expresión se puede escribir como

$$\frac{d}{dp} J_p(x) = J_p(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\psi(p+k+1)}{(p+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k},$$

donde $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$

Capítulo 6

Transformadas de Laplace

Una *transformada de tipo integral* para una función f es un operador F que tiene la forma general

$$F[f](s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t)f(t) dt.$$

La función K se llama el *núcleo* de la transformada y diferentes selecciones de K llevan a diferentes tipos de transformadas, las más comunes siendo las transformadas de Laplace y las transformadas de Fourier. A la función $F[f]$ se le llama la *transformada* de f . La idea general en el método de transformadas para resolver una ecuación diferencial es primeramente transformar la ecuación diferencial para f en una ecuación algebraica para $F[f]$, resolver esta ecuación para $F[f]$, y luego obtener f a partir de $F[f]$. Este último paso se como como el proceso de invertir la transformada y es usualmente el más complicado de todo el proceso. En la Figura 6.1 ilustramos este proceso para el operador \mathcal{L} de la transformada de Laplace.

6.1 Definiciones y propiedades básicas

La *transformada de Laplace* se obtiene tomando $K(s, t) = e^{-st}$, $\alpha = 0$, y $\beta = \infty$ en la formula de $F[f]$. En este caso usamos la notación $\mathcal{L}[f]$ en lugar de $F[f]$.

Definición 6.1. Para una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definimos su transfor-

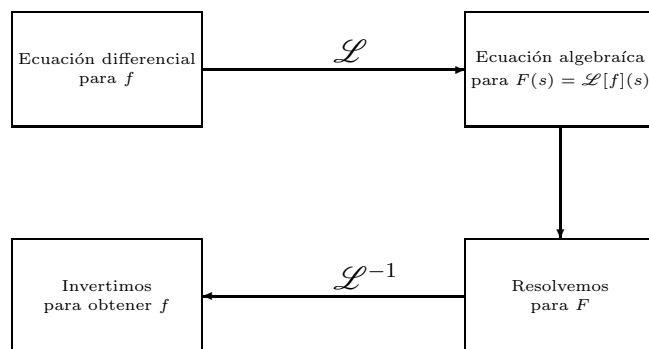


Figura 6.1: Esquema del proceso al resolver una ecuación diferencial usando transformadas de Laplace.

mada de Laplace, denotada $\mathcal{L}[f]$, por

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

La transformada de Laplace es particularmente útil para resolver problemas de valor inicial con ecuaciones lineales de coeficientes constantes no homogéneas, donde el lado derecho puede ser una función discontinua o de tipo “impulso”.

Comentario 6.2. La integral que aparece en $\mathcal{L}[f]$ es una impropia, por lo que dicho integral puede converger o divergir dependiendo de la función f y los valores de s .

Comenzamos estudiando para cuales funciones f , su transformada de Laplace existe.

Definición 6.3. Decimos que f es *continua por pedazos* en el intervalo $[\alpha, \beta]$ si existe una partición

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

del intervalo $[\alpha, \beta]$ tal que

i) f es continua en (t_{i-1}, t_i) , $1 \leq i \leq n$,

ii) los límites

$$\lim_{t \rightarrow t_{i-1}^+} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t),$$

ambos existen para $1 \leq i \leq n$.

Si f es continua por pedazos en el intervalo $[\alpha, \beta]$, y si (α, β) es acotado, entonces la integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt,$$

existe. No obstante si $\alpha = -\infty$ ó $\beta = \infty$, la integral podría ser divergente.

Teorema 6.4 (de comparación para integrales impropias). *Sea f una función continua para $t \geq a$.*

1. Si $|f(t)| \leq g(t)$ para toda $t \geq M \geq a$, y $\int_M^{\infty} g(t) dt < \infty$, entonces

$$\left| \int_a^{\infty} f(t) dt \right| < \infty.$$

2. Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para $t \geq M \geq a$, y $\int_M^{\infty} f(t) dt = \infty$, entonces

$$\int_a^{\infty} g(t) dt = \infty.$$

Para la existencia de la transformada de Laplace tenemos ahora el siguiente resultado.

Teorema 6.5. *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua por pedazos en $[0, A]$ para cualquier $A > 0$. Suponga que existen constante K, M positivas y otra constante $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad t \geq M.$$

Entonces $\mathcal{L}[f](s)$ existe para toda $s > a$.

Demostración: Note que

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Como f es continua por pedazos sobre $[0, M]$, la primera integral a la derecha de esta ecuación, es finita. Para el segundo integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_M^\infty e^{-st} |f(t)| dt, \\ &\leq K \int_M^\infty e^{-(s-a)t} dt. \end{aligned}$$

Pero este último integral es finito si y solo si $s > a$. Usando el teorema de comparación tenemos ahora que $\mathcal{L}[f](s)$ existe para toda $s > a$. \square

Vamos ahora a calcular la transformada de Laplace de algunas funciones conocidas. Aunque no haremos mención directa sobre esto, las funciones en los siguientes ejemplos cumplen con las condiciones del Teorema 6.5. ¿Puede dar en cada caso las constantes K, M, a para las cuales el teorema se cumple?

Ejemplo 6.6. Para la función $f(t) = 1, t \geq 0$, tenemos que

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

siempre que $s > 0$. \square

Ejemplo 6.7. Para $f(t) = \cos(at), t \geq 0$, tenemos que

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[\cos(at)](s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos(at) dt.$$

Pero

$$\int e^{-st} \cos(at) dt = \frac{a^2}{s^2 + a^2} \left[\frac{1}{a} \sin(at) - \frac{s}{a^2} \cos(at) \right] e^{-st}.$$

Sustituyendo en la expresión de $\mathcal{L}[f](s)$ tenemos que:

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{a^2}{s^2 + a^2} \left[\frac{1}{a} \sin(at) - \frac{s}{a^2} \cos(at) \right] e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + a^2},$$

siempre que $s > 0$. De igual forma se verifica que

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

\square

Es fácil verificar que el operador de la transformada de Laplace es *lineal*. Esto es, si f_1 y f_2 son funciones con transformadas de Laplace $\mathcal{L}[f_1]$ y $\mathcal{L}[f_2]$, entonces para cualesquiera constantes c_1 y c_2 , la transformada de $c_1f_1 + c_2f_2$ existe y

$$\mathcal{L}[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1\mathcal{L}[f_1] + c_2\mathcal{L}[f_2].$$

El siguiente resultado junto con la linealidad de \mathcal{L} descrita antes, nos permitirá convertir una ecuación diferencial para una cierta función f a una ecuación algebraica para $\mathcal{L}[f]$.

Teorema 6.8. *Para $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, suponga que f y f' son continuas, y que f'' es continua por pedazos en $[0, A]$ para toda $A > 0$. Suponga además que existen constante K, M positivas y otra constante $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t)|, |f'(t)| \leq Ke^{at}, \quad t \geq M.$$

Entonces $\mathcal{L}[f'](s)$ y $\mathcal{L}[f''](s)$ existen para $s > a$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0), \\ \mathcal{L}[f''](s) &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Ya tenemos los elementos esenciales para resolver un problema de valor inicial usando transformadas de Laplace.

Ejemplo 6.9. Ilustramos el método de transformadas de Laplace resolviendo el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0, & t \geq 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Note que este problema lo podemos resolver fácilmente por los métodos del Capítulo 3. No obstante procedemos con el método de las transformadas para mostrar en un caso sencillo los aspectos esenciales del mismo. Si aplicamos el operador \mathcal{L} a ambos lados de la ecuación diferencial y utilizamos la linealidad de este operador, tenemos que

$$\mathcal{L}[y''](s) - 5\mathcal{L}[y'](s) + 6\mathcal{L}[y](s) = 0.$$

Por el resultado del Teorema 6.8, tenemos que esta ecuación es equivalente a:

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[y](s) - (s - 5)y(0) - y'(0) = 0.$$

Usando las condiciones iniciales y despejando esta ecuación para $\mathcal{L}[y](s)$, tenemos que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s-3}{s^2-5s+6} = \frac{1}{s-2}.$$

Es fácil verificar que

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Tenemos entonces que $\mathcal{L}[y](s)$ corresponde a la transformada de e^{2t} por lo que podemos concluir que $y(t) = e^{2t}$. \square

El último paso en el ejemplo anterior se llama el *problema de invertir la transformada*. Mas general, si tenemos que $\mathcal{L}[y](s) = F(s)$, escribimos que $y = \mathcal{L}^{-1}[F]$ para representar a la *transformada inversa* de F . Bajo ciertas condiciones en F (que siempre vamos a suponer en este libro), la transformada inversa esta bien definida y tiene como resultado una función única y . Usando esto tenemos que toda formula para una transformada tiene o es equivalente a una correspondiente formula para la transformada inversa. El operado \mathcal{L}^{-1} , al igual que \mathcal{L} , es lineal.

Ejemplo 6.10. Trabajamos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, & t \geq 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1, \end{cases}$$

usando transformadas. Aplicando \mathcal{L} a ambos lados de la ecuación diferencial obtenemos que:

$$\mathcal{L}[y''](s) - 2\mathcal{L}[y'](s) + \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}.$$

Usando el Teorema 6.8, esto simplifica a:

$$(s^2 - 2s + 1)\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{s-1},$$

o lo mismo que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{(s-1)^3}.$$

Usando fracciones parciales llegamos a que

$$\frac{s}{(s-1)^3} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3},$$

por lo que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3}. \quad (6.1)$$

Como

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a, \quad n \text{ entero positivo},$$

tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right] (t) = \frac{1}{n!} t^n e^{at}.$$

Volviendo al problema original, de la ecuación (6.1) tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^2} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} \right] (t), \\ &= te^t + \frac{1}{2} t^2 e^t. \end{aligned}$$

□

Estos ejemplos ilustran lo siguiente del método de transformadas:

- i) tanto ecuaciones homogéneas como nohomogéneas, se trabajan de la misma manera;
- ii) no hace falta tener la solución general de la ecuación diferencial.

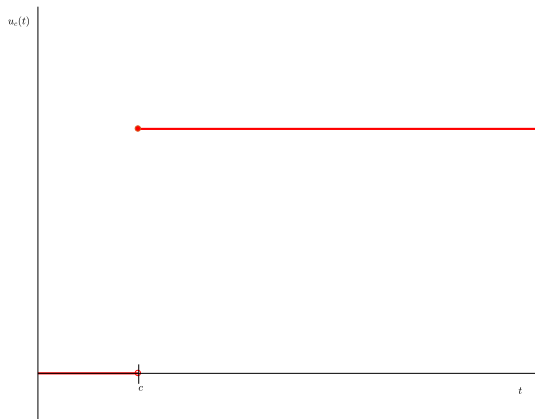
La única desventaja o “cuello de botella” con este método es que hay que invertir una transformada lo cual puede resultar tedioso.

6.2 Funciones escalonadas

Según mencionamos en la introducción, la transformada de Laplace es particularmente útil para resolver problemas con ecuaciones nohomogéneas donde el lado derecho es discontinuo o de tipo impulso. Para formalizar esto necesitamos definir las funciones escalonadas unitarias.

Definición 6.11. Para cualquier $c > 0$, definimos la *función escalonada unitaria* u_c por la fórmula

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < c, \\ 1 & , \quad t \geq c. \end{cases}$$

Figura 6.2: Gráfica de la función escalonada u_c .

Las funciones escalonadas unitarias (vea la Figura 6.2) pueden interpretarse como un modelo para la situación de un circuito eléctrico inicialmente apagado (sin corriente), hasta el momento en que $t = c$ donde el circuito se prende (se aplica corriente). Note que

$$\mathcal{L}[u_c](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0. \quad (6.2)$$

Recuerde que si $c > 0$ y f es una función, entonces $f(t - c)$ representa una traslación de f hacia la derecha por c unidades. Usando la definición de u_c , vemos que:

$$u_c(t)f(t - c) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < c, \\ f(t - c) & , \quad t \geq c. \end{cases}$$

El resultado de esta operación es trasladar la función f por c unidades a la derecha, y luego truncarla (hacerla cero) en el intervalo $(0, c)$. (Vea La Figura 6.3.) Tenemos ahora el siguiente resultado:

Teorema 6.12. *Suponga que $\mathcal{L}[f](s)$ existe para $s > a$ y que $c > 0$. Entonces*

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t - c)](s) = e^{-cs} \mathcal{L}[f](s), \quad s > a,$$

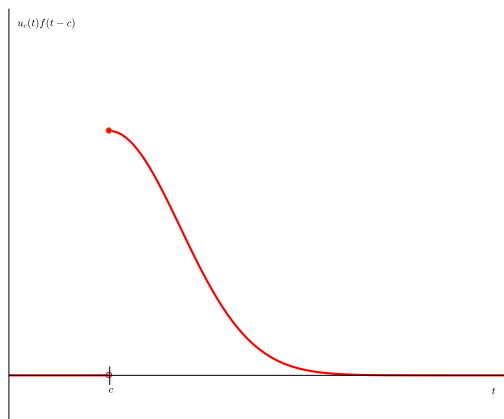


Figura 6.3: Gráfica de la función trasladada y truncada $u_c(t)f(t-c)$.

o lo mismo

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}\mathcal{L}[f](s)](t) = u_c(t)f(t-c).$$

Demostración: Por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}u_c(t)f(t-c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st}f(t-c) dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(r+c)}f(r) dr = e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-sr}f(r) dr, \\ &= e^{-cs}\mathcal{L}[f](s), \end{aligned}$$

para $s > a$. La segunda parte del teorema es consecuencia de la definición de \mathcal{L}^{-1} . \square

Comentario 6.13. Si escribimos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, el resultado de la segunda parte del teorema anterior, se puede escribir de la forma:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)](t) = u_c(t)f(t-c).$$

Ejemplo 6.14. Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t < 1, \\ t + e^t & , t \geq 1. \end{cases}$$

Note que f tiene una discontinuidad en $t = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} t = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} (t + e^t) = 1 + e.$$

Vamos a calcular $\mathcal{L}[f]$. Para esto, primero observamos que $f(t) = g(t) + h(t)$ donde $g(t) = t$ para $t \geq 0$ y

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 1, \\ e^t & , \quad t \geq 1, \end{cases} = u_1(t)e^t.$$

De modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[g](s) + \mathcal{L}[u_1(t)e^t](s) = \mathcal{L}[t](s) + e\mathcal{L}[u_1(t)e^{t-1}](s), \\ &= \frac{1}{s^2} + ee^{-s}\mathcal{L}[e^t](s), \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s+1}}{s-1}, \end{aligned}$$

para $s > 1$. □

Ejemplo 6.15. Vamos a calcular la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{se^{-s}}{s^2 + 4}.$$

Por la segunda parte del Teorema 6.12, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = u_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right](t-1).$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right](t) = \cos(2t),$$

llegamos a que

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = u_1(t)\cos[2(t-1)].$$

□

Otro resultado útil es el siguiente:

Teorema 6.16. *Suponga que $\mathcal{L}[f](s)$ existe para $s > a$ y que $c > 0$. Entonces*

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - c), \quad s > a + c,$$

o lo mismo, poniendo $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s - c)](t) = e^{ct}f(t).$$

Demostración: Usando la definición de la transformada, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{ct}f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}e^{ct}f(t) dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t}f(t) dt, \\ &= \mathcal{L}[f](s - c), \end{aligned}$$

para $s - c > a$, es decir $s > a + c$. □

Ejemplo 6.17. Usando este resultado y que $F(s) = \mathcal{L}[u_1](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ para $s > 0$, tenemos que

$$\mathcal{L}[e^t u_1(t)](s) = F(s - 1) = \frac{e^{-(s-1)}}{s - 1} = \frac{e^{-s+1}}{s - 1},$$

para $s > 1$. □

Combinando (6.2) y los resultados de los Teoremas 6.12 y 6.16, podemos ahora resolver problemas de valor inicial con lados derecho discontinuos.

Ejemplo 6.18. Resolvemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) + 5y(t) = t + u_1(t)e^t, & t \geq 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 2, \end{cases}$$

usando transformadas. El lado derecho de la ecuación diferencial lo habiamos examinado antes donde vimos que es discontinuo en $t = 1$ y que

$$\mathcal{L}[t + u_1(t)e^t](s) = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{s - 1}, \quad s > 1.$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}[y''](s) + 5\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[t + u_1(t)e^t](s).$$

Usando el Teorema 6.8, las condiciones iniciales, y la transformada de $t + u_1(t)e^t$, tenemos que esta ecuación es equivalente a

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 5)} - \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)(s^2 + 5)} + \frac{2}{s^2 + 5}.$$

Mediante fracciones parciales obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s^2 + 5)} &= \frac{\frac{1}{5}}{s^2} - \frac{\frac{1}{5}}{s^2 + 5}, \\ \frac{1}{(s-1)(s^2 + 5)} &= \frac{\frac{1}{6}}{s-1} - \frac{\frac{1}{6}(s+1)}{s^2 + 5}. \end{aligned}$$

Usando esto en la ecuación anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] (t) - \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 5} \right] (t) - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}}{s-1} \right] (t) \\ &\quad + \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}(s+1)}{s^2 + 5} \right] (t) + 2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 5} \right] (t). \end{aligned}$$

Ya vimos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] (t) = t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 5} \right] (t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(t\sqrt{5}).$$

Con $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}}{s-1} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s-1)](t) = e^t u_1(t).$$

Falta calcular

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}(s+1)}{s^2 + 5} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}s}{s^2 + 5} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}}{s^2 + 5} \right] (t).$$

Usando ahora el Teorema 6.16 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}s}{s^2 + 5} \right] (t) &= e \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}s}{s^2 + 5} \right] (t) = e u_1(t) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 5} \right] (t-1) \\ &= e u_1(t) \cos \sqrt{5}(t-1), \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(s-1)}}{s^2 + 5} \right] (t) &= e \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s^2 + 5} \right] (t) = e u_1(t) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 5} \right] (t-1) \\ &= \frac{e}{\sqrt{5}} u_1(t) \sin \sqrt{5}(t-1), \end{aligned}$$

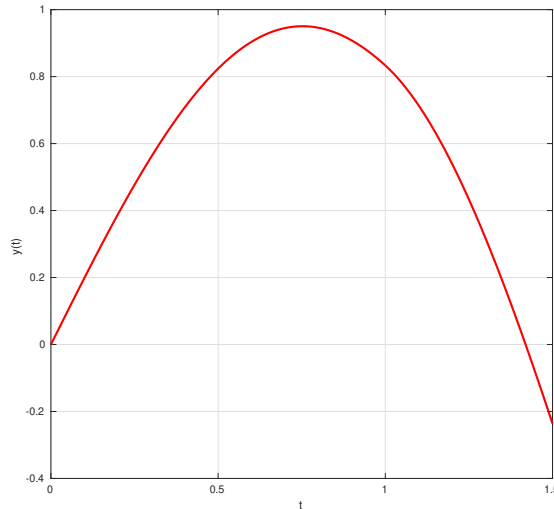


Figura 6.4: Gráfica de la solución al problema de valor inicial del Ejemplo 6.18.

Combinando todos estos resultados intermedios obtenemos finalmente que

$$y(t) = \frac{1}{5}t + \frac{9}{5\sqrt{5}} \sin(t\sqrt{5}) - \frac{1}{6}u_1(t)e^t + \frac{e}{6}u_1(t) \left[\cos \sqrt{5}(t-1) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}(t-1) \right].$$

Se puede verificar ahora que tanto y como y' son continuas en $t = 1$, pero y'' tiene una discontinuidad o brinco en $t = 1$. (Vea la Figura 6.4.) \square

6.3 Funciones de tipo impulso: la delta de Dirac

Las funciones de tipo impulso son funciones que son cero para casi todos los valores de su dominio, excepto por un pequeño intervalo donde asumen valores “bien grandes”. Este tipo de funciones se utiliza para modelar voltajes o fuerzas grandes, como las que ocurren en una colisión, que actúan por un

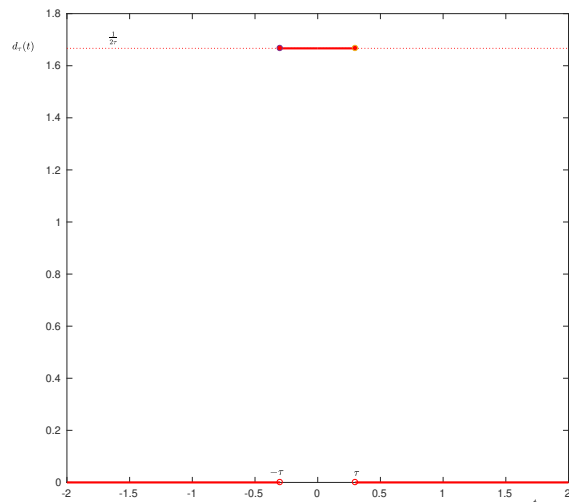


Figura 6.5: Gráfica de la función impulso unitaria.

pequeño instante de tiempo. Si $g(t)$ es una de estas funciones, llamamos a la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt,$$

el *impulso de g* .

Las funciones impulso *unitarias*, se representan por d_τ donde $\tau > 0$, y están definidas por (vea la Figura 6.5):

$$d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & , \quad t \in (-\tau, \tau), \\ 0 & , \quad \text{en el resto.} \end{cases}$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t) dt = 1,$$

por lo que d_τ tiene impulso unitario, y

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d_\tau(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

Para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, es fácil ver que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t - t_0) f(t) dt = f(t_0),$$

Usando esto, definimos la *delta de Dirac centrada en $t = t_0$* , denotada δ_{t_0} , por

$$\delta_{t_0}[f] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_0)f(t) dt.$$

δ_{t_0} no es una función en el sentido usual. Es lo que en matemáticas llamamos un *funcional*. También se le llama una *distribución* o *función generalizada*. La delta Dirac se utiliza para modelar un impulso unitario concentrado en $t = t_0$. Usando la definición de δ_{t_0} , se puede verificar lo siguiente:

- i) $\delta_{t_0}[f] = f(t_0)$. En particular $\delta_{t_0}[1] = 1$, por lo que δ_{t_0} tiene impulso unitario en $t = t_0$.
- ii) $\delta_{t_0}[f] = \delta[f(t + t_0)]$ donde $\delta = \delta_0$, i.e., la delta de Dirac correspondiente a $t_0 = 0$.
- iii) $\delta_{t_0}[f] = 0$ para toda f continua tal que $t_0 \notin \{t : f(t) \neq 0\}$.

Comentario 6.19. La confusión usual que surge al estudiar la delta de Dirac es que la mayoría de los libros usan la notación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)f(t) dt,$$

para representar $\delta_{t_0}[f]$. Entonces escriben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_0)f(t) dt,$$

como la definición de δ_{t_0} . El problema es que el “integral” que aparece en el lado izquierdo de esta ecuación, no es una integral en el sentido usual. Solo representa el límite de los integrales en el lado derecho en la definición de δ_{t_0} . Para ver esto, note que la propiedad (i) con $f(t) = 1, t \geq 0$, y la propiedad (iii) usualmente se escriben en muchos libros de texto de la forma siguiente:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) dt = 1$,
- b) $\delta_{t_0}(t) = 0$ para todo $t \neq t_0$.

Si la integral en (a) fuese la integral de Riemann (o de Lebesgue), ninguna función satisface estas dos propiedades.

Dado que δ_{t_0} no es una función en el sentido usual, debemos ser cuidadosos cuando hablamos de su transformada. Más específico, definimos la transformada de Laplace de δ_{t_0} donde $t_0 > 0$ por:

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}[d_\tau(t - t_0)].$$

Tenemos ahora:

Teorema 6.20. Para $t_0 > 0$,

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}] = e^{-t_0 s}, \quad s > 0.$$

Demostración: Necesitamos primeramente $\mathcal{L}[d_\tau(t - t_0)]$. Para $0 < \tau < t_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[d_\tau(t - t_0)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-t_0 s}}{s} \frac{e^{-s\tau} - e^{s\tau}}{2\tau}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{-s\tau} - e^{s\tau}}{2\tau} = -s,$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}[d_\tau(t - t_0)] = -\frac{e^{-t_0 s}}{s} (-s) = e^{-t_0 s},$$

para $s > 0$. □

Ejemplo 6.21. Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = -\delta_\pi(t) & t \geq 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial, obtenemos

$$\mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) = -\mathcal{L}[\delta_\pi](s).$$

Usando el Teorema 6.8 y el resultado anterior, podemos escribir esto como

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y](s) = -e^{-\pi s},$$

o lo mismo, usando las condiciones iniciales, que

$$\mathcal{L}[y](s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Con $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \sin t, \\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} F(s)](t) &= u_\pi(t) \sin(t - \pi) = -u_\pi(t) \sin t. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= -\mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} F(s)](t) + \mathcal{L}^{-1}[F](t), \\ &= (1 + u_\pi(t)) \sin t. \end{aligned}$$

Note que y es continua pero y' tiene una discontinuidad en $t = \pi$. Vea la Figura 6.6. \square

En la Tabla 6.1 al final de este capítulo, damos un listado de las transformadas de Laplace que calculamos en este capítulo así como otras que se utilizan comúnmente al resolver problemas de valor inicial y en otras aplicaciones.

6.4 Transformadas de las funciones de Bessel

En esta sección vamos a derivar unas expresiones para las funciones de Bessel del primer tipo y con orden p entero. Los cálculos los haremos sin ser muy rigurosos de las condiciones matemáticas que los justifican. No obstante, todos los resultados presentados aquí pueden ser verificados bajo ciertas condiciones.

De la formula (5.23) tenemos que

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

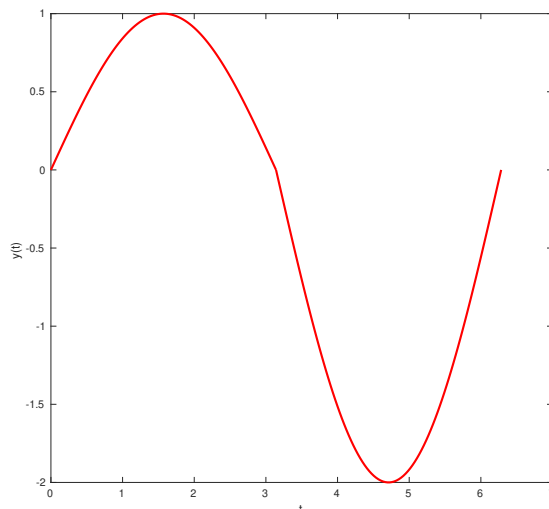


Figura 6.6: Gráfica para la solución del problema de valor inicial del Ejemplo 6.21.

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, y suponiendo que las operaciones de transformada y sumatoria se pueden intercambiar, tenemos que

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} \mathcal{L}[x^{2k}](s).$$

De la Tabla 6.1 tenemos que

$$\mathcal{L}[x^{2k}](s) = \frac{(2k)!}{s^{2k+1}}.$$

Sustituyendo ahora en la expresión anterior llegamos a que

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} \frac{(2k)!}{s^{2k+1}}.$$

Pero

$$(2k)! = 2^k k!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)),$$

por lo que

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{1+2(k-1)}{2}}{k!} \frac{1}{s^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{s^{2k+1}},$$

donde

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad |x| < 1,$$

tenemos entonces que

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad s > 1. \quad (6.3)$$

Usando que $J'_0 = -J_1$ tenemos también que

$$\mathcal{L}[J_1](s) = J_0(0) - s\mathcal{L}[J_0] = \frac{\sqrt{1+s^2} - s}{\sqrt{1+s^2}}, \quad s > 1. \quad (6.4)$$

Usando las propiedades (5.25) se puede verificar que

$$J'_p(x) = \frac{1}{2}[J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)].$$

Usando esto tenemos que

$$\mathcal{L}[J_{p+1}](s) = \mathcal{L}[J_{p-1}](s) - 2s\mathcal{L}[J_p](s), \quad p \geq 1. \quad (6.5)$$

Con esta recursión y las ecuaciones (6.3) y (6.4) podemos generar $\mathcal{L}[J_p]$ para toda $p \geq 0$ entero. De hecho, podemos resolver la recursión. Para ver esto, note que la recursión anterior con $p = 1$ da como resultado que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[J_2](s) &= \mathcal{L}[J_0](s) - 2s\mathcal{L}[J_1](s), \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - 2s \left[\frac{\sqrt{1+s^2} - s}{\sqrt{1+s^2}} \right], \\ &= \frac{(\sqrt{s^2+1} - s)^2}{\sqrt{s^2+1}}. \end{aligned}$$

Ya podemos predecir un patrón, esto es

$$\mathcal{L}[J_p](s) = \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^p}{\sqrt{s^2 + 1}}, \quad p \geq 0, \quad (6.6)$$

lo cual puede verificarse usando inducción matemática.

6.5 Más formulas de transformadas

En esta sección vamos a obtener varias formulas para transformadas de Laplace de funciones que resultan por algún proceso a partir de otras funciones. El primer caso que examinamos es el de la convolución de dos funciones. Si $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas, definimos la *convolución* de f y g por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Vamos ahora a calcular $\mathcal{L}[f * g](s)$. Usando la definición de la transformada de Laplace, tenemos que

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] dt.$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st}g(t - \tau) dt \right] d\tau, \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \mathcal{L}[u_\tau(t)g(t - \tau)](s) d\tau. \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{L}[u_\tau(t)g(t - \tau)](s) = e^{-s\tau}G(s),$$

donde $G(s) = \mathcal{L}[g](s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\tau) \mathcal{L}[u_\tau(t)g(t - \tau)](s) d\tau &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau}G(s) d\tau, \\ &= G(s) \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau) d\tau = G(s)F(s), \end{aligned}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Combinado estos resultados llegamos a la formula:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s). \quad (6.7)$$

La próxima formula es un tipo de “integración por partes” pero para transformadas de Laplace. Veamos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{L}[f](s)g(s) ds &= \int_0^\infty g(s) \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right] ds, \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\int_0^\infty e^{-st} g(s) ds \right] dt, \\ &= \int_0^\infty f(t)\mathcal{L}[g](t)dt, \end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f](s)g(s) ds = \int_0^\infty f(t)\mathcal{L}[g](t) dt. \quad (6.8)$$

Un caso especial de esta formula se obtiene tomando g como $\mathcal{L}^{-1}[g]$, de donde obtenemos, usando que $\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[g]] = g$, que

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}^{-1}[g](s) ds = \int_0^\infty f(t)g(t) dt. \quad (6.9)$$

La ultima formula que veremos en esta sección es para la transformada de $\frac{f(t)}{t}$. Nuevamente, usando la definición de la transformada de Laplace, tenemos que

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt$$

Como

$$\frac{e^{-st}}{t} = \int_s^\infty e^{-ut} du, \quad t > 0,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-ut} du \right] f(t) dt, \\ &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right] du, \\ &= \int_s^\infty F(u) du, \end{aligned}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Tenemos ahora la formula

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(u) du. \quad (6.10)$$

Ejemplo 6.22. Vamos a utilizar esta última formula para calcular la transformada inversa de $\ln(1 + \frac{1}{s^2})$. Primero, observe que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \int_s^\infty F(u) du,$$

donde

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 1)}.$$

(Verifique derivando con respecto a s la expresión anterior.) Usando fracciones parciales vemos que

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1}.$$

De aqui tenemos ahora que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = 2(1 - \cos(t)).$$

Usando la formula (6.10) obtenemos finalmente que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right](t) = 2 \frac{1 - \cos(t)}{t}.$$

□

6.6 Ejercicios

Ejercicio 6.1. Calcule $\mathcal{L}[e^{-2t} f(t)](s)$ dado que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s^3}{s^4 - s + 2}.$$

Ejercicio 6.2. Calcule $\mathcal{L}[e^t \cos(t) \operatorname{sen}(t)](s)$.

Ejercicio 6.3. Usando la definición de la transformada de Laplace, calcule $\mathcal{L}[f](s)$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 3t & , \quad 0 \leq t \leq 2, \\ 6 & , \quad t > 2. \end{cases}$$

Ejercicio 6.4. Calcule la transformada inversa de cada una de las siguientes transformadas:

a) $F(s) = \frac{6s - 5}{s^2 + 7}$

b) $F(s) = \frac{1 - 3s}{s^2 + 8s + 21}$

c) $G(s) = \frac{3s - 2}{2s^2 - 6s - 2}$

d) $H(s) = \frac{s + 7}{s^2 - 3s - 10}$

e) $G(s) = \frac{86s - 78}{(s + 3)(s - 4)(5s - 1)}$

f) $F(s) = \frac{2 - 5s}{(s - 6)(s^2 + 11)}$

g) $G(s) = \frac{25}{s^3(s^2 + 4s + 5)}$

Ejercicio 6.5. Verifique que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_0) f(t) dt = f(t_0),$$

Ejercicio 6.6. Suponga que la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y que tiene transformada $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Defina $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Verifique que

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Usando este resultado, calcule

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] (t).$$

Ayuda: Para la primera parte del ejercicio, comience calculando g' y luego su transformada.

Ejercicio 6.7. Halle la transformada inversa de:

$$F(s) = \frac{e^{4s}}{(s-2)(s+3)}.$$

Use que

$$\frac{1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3} \right].$$

Ejercicio 6.8. Usando transformadas de Laplace halle la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 3y(t) = f(t), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2., \end{cases}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 \leq t < 1, \\ t & , \quad 1 \leq t < 4, \\ -1 & , \quad t \geq 4. \end{cases}$$

Ejercicio 6.9. Usando transformadas de Laplace halle la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \delta(t - \pi), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6.10. Usando transformadas de Laplace halle la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + \frac{5}{4}y(t) = u_1(t) \operatorname{sen}(t-1), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Use que

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + s + \frac{5}{4})} = -\frac{4}{17} \left[\frac{4s - 1}{s^2 + 1} - \frac{4s + 3}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \right],$$

$$s^2 + s + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + 1.$$

Ejercicio 6.11. Usando transformadas de Laplace, halle la solución del problema de valor inicial:

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Use que

$$\frac{1}{(s - 2)(s + 3)} = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 3} \right].$$

Ejercicio 6.12. Usando transformadas de Laplace, halle la solución del problema de valor inicial:

$$y''(x) + 2y'(x) + 10y(x) = -\delta(t - 4\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Use que

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 3^2}.$$

Ejercicio 6.13. Dado que

$$y(t) + \int_0^t y(s) \, ds = 1,$$

calcule $\mathcal{L}[y](s)$.

Ejercicio 6.14. Utilizando las ecuaciones (6.3), (6.4), (6.5), y el principio de inducción matemática, verifique que (6.6) es cierta para todo entero $p \geq 0$.

Tabla 6.1: Transformadas de Laplace más comunes.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
$f(t-c)u_c(t)$	$e^{-cs}F(s)$
$\delta_{t_0}(t)$	e^{-st_0}
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$
t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad (n \geq -1, n \in \mathbb{R})^1$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at} \sinh at$	$\frac{a}{(s-a)^2 - a^2}$
$e^{at} \cosh at$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - a^2}$

¹Vea la ecuación (5.19).

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s) = F(s)$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \sinh at$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$
$t \cosh at$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$

Capítulo 7

Métodos numéricos

Por lo general, la solución exacta de un problema de valor inicial es imposible o difícil de obtener de forma explícita. Por tal razón los métodos numéricos se utilizan para aproximar dichas soluciones. Es importante entender que todo método numérico conlleva un error de aproximación¹. Por tal razón vamos a discutir de forma intuitiva este concepto de modo que podamos comparar diferentes métodos usando como criterio su *orden de convergencia*.

Los métodos que discutiremos en este capítulo se utilizan tanto para ecuaciones escalares como para sistemas de ecuaciones. Veremos el método de Euler y los llamados métodos Runge–Kutta. La programación de éstos métodos la haremos usando el programado MATLAB, pero la misma se puede realizar fácilmente en cualquier otro sistema como Mathematica, SCILAB, FreeMat, etc. También aprenderemos a usar las funciones para resolver problemas de valor inicial que vienen como parte del programado de MATLAB.

7.1 El método de Euler

Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 < t < b, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

¹Aunque no lo discutiremos en este libro, también hay errores por el uso de una computadora para realizar los cálculos. Esto se debe a que toda operación aritmética que se realiza en un computador conlleva un pequeño error. Estos errores en ocasiones pueden acumularse de modo que los resultados calculados podrían no tener significado alguno.

Defina para $n \geq 1$ el *largo de paso* h y la *partición* (uniforme) $\{t_j\}$ del intervalo $[t_0, b]$ por²:

$$h = \frac{b - t_0}{n}, \quad t_j = t_0 + jh, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7.2)$$

Para cualquier $j \geq 0$, tenemos usando la ecuación diferencial en (7.1) y el Teorema de Taylor, que:

$$\begin{aligned} y(t_{j+1}) &= y(t_j) + hy'(t_j) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi_j), \\ &= y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi_j). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Eliminando los términos³ $O(h^2)$ obtenemos la aproximación:

$$y(t_{j+1}) \approx y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7.4)$$

Suponga que y_j representa una aproximación cualquiera de $y(t_j)$. Motivados por la aproximación (7.4), definimos las aproximaciones (y_j) por la *recursión*:

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (7.5)$$

donde y_0 está dada por la condición inicial en (7.1). Esta recursión se conoce como el *método de Euler*. La cantidad

$$T_{j+1} = \frac{1}{2}h^2y''(\xi_j), \quad (7.6)$$

que descartamos en (7.3) para obtener las aproximaciones (7.4), se llama el *error de truncación o error local* del método de Euler y está íntimamente relacionada con la convergencia del método. De hecho si definimos los *errores absolutos* por

$$e_j = y(t_j) - y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

entonces se puede verificar, sujeto a ciertas condiciones en la función f que aparece en el PVI (7.1), que para una cierta constante $K > 0$:

$$|e_j| \leq Kh, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7.7)$$

O sea que $e_j = O(h)$ para todo j . Decimos entonces que el método de Euler tiene un *orden de convergencia global* de $O(h)$, o lo mismo que es un método de *orden uno de convergencia*.

²En MATLAB la instrucción `linspace(a,b,n+1)` genera una partición uniforme del intervalo $[a, b]$ con n subintervalos.

³La notación $O(h^p)$ se utiliza para representar expresiones o términos proporcionales a h^p .

La programación en MATLAB del método de Euler es relativamente simple. Hacemos esto con una subrutina llamada `feulern` que recibe en la secuencia de llamada el nombre de otra subrutina que evalúa la función f , y los datos t_0 , b , y_0 , n :

```
function [tvals,yvals]=feulern(f,tspan,y0,n)
t0=tspan(1);
b=tspan(2);
h=(b-t0)/n;
yvals=zeros(n+1,1);
tvals=linspace(t0,b,n+1)';
yvals(1)=y0;
for i=2:n+1
    yvals(i)=yvals(i-1)+h*feval(f,tvals(i-1),yvals(i-1));
end
```

Esta subrutina devuelve dos arreglos columna: uno con los (t_j) y otro con las aproximaciones (y_j) . Veamos ahora como se usa este programa.

Ejemplo 7.1. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{5y(t)}{t+1} - y(t), & 0 < t < 4, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La ecuación diferencial es separable por lo que la solución exacta del PVI es $y(t) = (t+1)^5 e^{-t}$. Aunque conocemos la solución exacta en este problema, de todos modos usamos el método de Euler para aproximar la solución del PVI para así verificar en este caso que tal funciona el método.

La siguiente función en MATLAB evalúa el lado derecho de la ecuación diferencial:

```
function f=etest(t,y);
f=5*y/(t+1)-y;
```

Las siguientes instrucciones de MATLAB sirven para calcular una solución aproximada del PVI dado usando $n = 20$. También se trazan las gráficas de la solución numérica junto con la solución exacta para comparar los resultados:

```
[t,y]=feulern('etest',[0,4],1,20);
yy=(t+1).^5.*exp(-t);
plot(t,y,'kx',t,yy,'k')
xlabel('t');ylabel('y');
legend('Solucion Aproximada','Solucion Exacta')
```

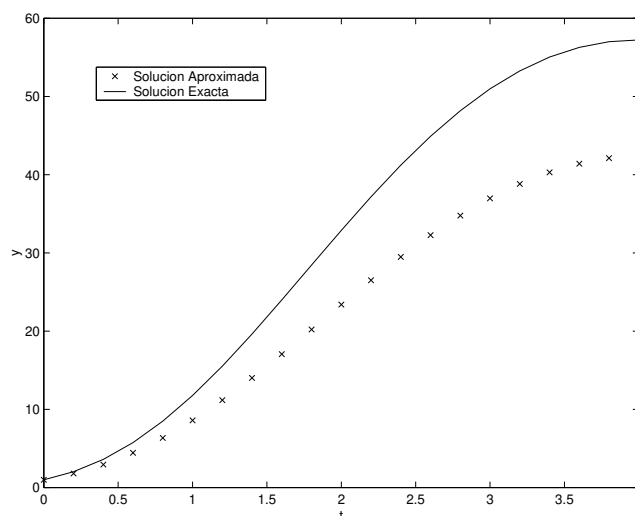


Figura 7.1: Solución exacta vs la calculada por el método de Euler en el Ejemplo (7.1).

Las solución numérica se ilustra en la Figura (7.1) con el símbolo x . Note que las aproximaciones numéricas no coinciden con la solución exacta y que el error aumenta según aumenta la t . Esto es típico de los métodos numéricos que usan un largo de paso fijo h . ¡Esto no contradice el estimado del error (7.7)! Para hacer el error en los cálculos más pequeño, tendríamos que hacer la h más pequeña, o lo mismo, la n más grande. No obstante, para una h fija, el error puede crecer hasta exponencialmente con el largo del intervalo. \square

7.2 Métodos Runge–Kutta

Vamos ahora a estudiar una familia de métodos con un orden de convergencia mayor que el del método de Euler. Un análisis más profundo del método de Euler muestra que según el método progresa, éste va generando aproximaciones a lo largo de la tangente de una cierta curva que está *cerca* a la curva desconocida o buscada. Los métodos Runge–Kutta extienden esta idea geométrica al utilizar varias derivadas o tangentes intermedias, en lugar de solo una, para así obtener una mejor aproximación de la función desconocida. Los métodos Runge–Kutta más simples se obtienen usando dos de estas derivadas intermedias.

Motivos por estas ideas, buscamos métodos o fórmulas numéricas de la forma:

$$y_{j+1} = y_j + h[\gamma_1 f(t_j, y_j) + \gamma_2 f(t_j + \alpha h, y_j + \beta h f(t_j, y_j))], \quad j \geq 0. \quad (7.8)$$

Note que aunque en la fórmula se perciben tres f 's, el método envuelve solo dos evaluaciones ya que dos de éstas f 's tienen los mismos argumentos. La idea ahora es determinar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ de modo que el método tenga orden de convergencia lo más alto posible. Un análisis del error local de ésta fórmula basado en el Teorema de Taylor muestra que el orden más alto que puede tener ésta fórmula es dos y que esto puede ocurrir si y solo si:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2\gamma_2}, \quad \gamma_2 \neq 0. \quad (7.9)$$

Es decir si $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ cumplen con estas condiciones, entonces $e_j = y(t_j) - y_j = O(h^2)$ para toda j . Algunos casos especiales de éstas fórmulas son:

Método de Heun: Aquí se toma $\gamma_2 = 1/2$ de modo que el método reduce a:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_j + hf(t_j, y_j))], \quad j \geq 0. \quad (7.10)$$

Para propósitos de hacer cálculos es mejor escribir esta fórmula como:

$$\begin{cases} y_{j+1}^* = y_j + hf(t_j, y_j), \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_{j+1}^*)], \end{cases} \quad j \geq 0. \quad (7.11)$$

Método del Punto Medio: Tomamos $\gamma_2 = 1$ de modo que el método reduce a:

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(t_j, y_j)\right), \quad j \geq 0. \quad (7.12)$$

Aunque los métodos de Heun y del punto medio generan soluciones con un grado de precisión usualmente razonable, nos interesa tener métodos de orden aún mayor, los cuales no requieren de una h muy pequeña para un buen grado de aproximación. Utilizando más de dos evaluaciones intermedias, es posible obtener métodos Runge–Kutta de orden arbitrario. Un ejemplo de un método Runge–Kutta de orden cuatro y que utiliza cuatro evaluaciones intermedias es el llamado *método Runge–Kutta clásico*. Las formulas recursivas de este método son:

$$\begin{cases} v_1 = f(t_j, y_j), & v_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}v_1\right), \\ v_3 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}v_2\right), & v_4 = f(t_j + h, y_j + hv_3), \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}[v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4], \end{cases} \quad j \geq 0. \quad (7.13)$$

El programado estándar de MATLAB incluye entre otras, dos subrutinas intrínsecas para la solución de problemas de valor inicial: `ode23` y `ode45`. `ode23` utiliza una combinación de un método Runge–Kutta de orden dos con otro de orden tres. La combinación de estos métodos permite que se pueda calcular un estimado del error en la aproximación numérica en cada paso, de modo que la subrutina puede ajustar el largo de paso h en forma dinámica para mantener el error global menor de una tolerancia especificada por el usuario. Estos métodos se dicen que son *adaptativos* o de *largo de paso variable*. La subrutina `ode45` es similar a `ode23` pero utiliza una combinación de métodos de ordenes cuatro y cinco, de cinco y seis evaluaciones respectivamente. La secuencia de llamada para ambas rutinas utiliza el mismo formato: el nombre del archivo para la función de MATLAB que evalúa el lado derecho f , los tiempos inicial y final, la condición inicial, y otros parámetros que son opcionales.

Ejemplo 7.2. Considere el siguiente modelo simplificado del corazón donde $x(t)$ representa el largo de una cierta fibra o músculo del corazón y $s(t)$ representa un estímulo (eléctrico) aplicado:

$$\begin{cases} x'(t) = \mu(-s(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + px(t)), \\ s'(t) = x(t)/\mu. \end{cases}$$

Aquí μ y p son parámetros del modelo. El lado derecho del sistema lo evaluamos mediante la siguiente subrutina en MATLAB:

```
function f=heart(t,y,param)
%
% y(1) representa x(t) y y(2) representa s(t)
%
m=param(1); p=param(2);
f=zeros(2,1);
f(1)=m*(-y(2)-y(1)^3/3+p*y(1));
f(2)=y(1)/m;
```

Note la forma de pasar parámetros a la subrutina que evalúa el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales. Para los cálculos usamos las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $s(0) = -1$ y los valores de $\mu = 0.5$ y $p = 1$. Ahora aproximamos la solución con la siguiente secuencia de instrucciones en MATLAB:

```
param=[0.5,1];
[t,y]=ode45(@(t,u)heart(t,u,param),[0,10],[0,-1]);
plot(t,y(:,1),'k-',t,y(:,2),'k.')
xlabel('t');ylabel('y');
legend('x(t)', 's(t)')
```

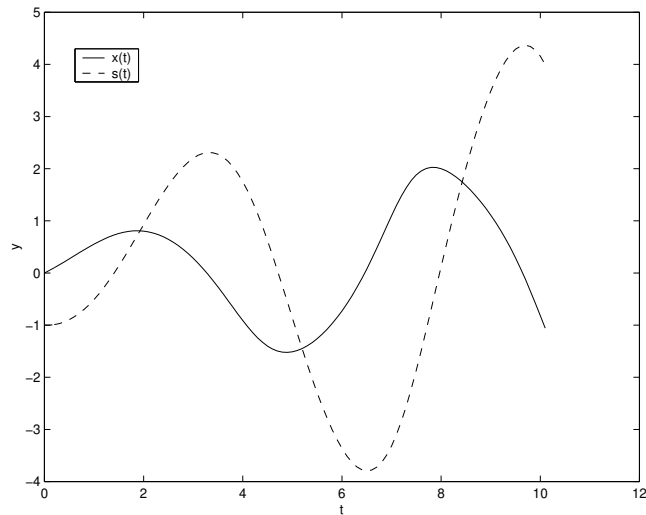


Figura 7.2: Solución numérica del problema de valor inicial para un modelo del corazón.

lo cual produce la Figura (7.2). □

Ejemplo 7.3. Considere el problema de valor inicial para la siguiente ecuación diferencial no lineal de orden dos:

$$\begin{cases} 2x''(t) + 4x'(t)^2 - 4x(t) = \cos(x(t)), \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 10. \end{cases}$$

Haciendo la sustitución o cambio de variables $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, entonces el problema de arriba es equivalente al siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -2x_2(t)^2 + 2x_1(t) + \frac{1}{2} \cos(x_1(t)), \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 10. \end{cases}$$

El lado derecho de este sistema lo evaluamos con la siguiente subrutina de MATLAB:

```
function f=ejemode2(t,x)
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=-2*x(2)^2+2*x(1)+0.5*cos(x(1));
```

La secuencia de llamada para resolver el problema de valor inicial en el intervalo $[0, 5]$ por ejemplo, sería:

```
[t,y]=ode45(@ejemode2,[0,5],[2,10]);
plot(t,y(:,1),'k')
xlabel('t'); ylabel('x(t)')
```

En la Figura (7.3) mostramos la aproximación numérica calculada. □

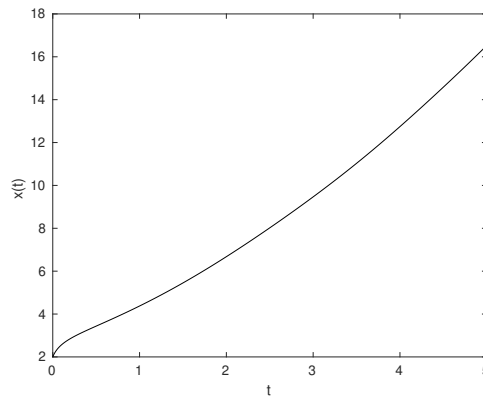


Figura 7.3: Solución numérica del problema de valor inicial del Ejemplo 7.3.

Ejemplo 7.4. Vamos a examinar ahora las ecuaciones diferenciales que se obtienen de las leyes de Newton aplicadas al problema de dos cuerpos. Suponemos que uno de los cuerpos es mucho más masivo que el otro de modo que su movimiento es descartable, e.g., la tierra y un satélite. Suponemos también que el movimiento es en un plano. Como la fuerza gravitacional es inversamente proporcional a la distancia entre los cuerpos, tenemos tomando todas las constantes envueltas como uno, que la posición $(x(t), y(t))$ del cuerpo pequeño está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{x(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}, \\ y''(t) = -\frac{y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Para la simulación utilizamos las condiciones iniciales

$$x(0) = 0.4, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0.1, \quad y'(0) = 2.$$

Este sistema de orden dos lo podemos convertir a uno de primer orden usando la sustitución:

$$u_1(t) = x(t), \quad u_2(t) = x'(t), \quad u_3(t) = y(t), \quad u_4(t) = y'(t).$$

El sistema resultante de orden uno es:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = -u_1(t)/(u_1(t)^2 + u_3(t)^2)^{3/2}, \\ u_3'(t) = u_4(t), \\ u_4'(t) = -u_3(t)/(u_1(t)^2 + u_3(t)^2)^{3/2}, \end{cases}$$

donde $u_1(0) = 0.4, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0.1, u_4(0) = 2$. El lado derecho de este sistema lo podemos evaluar con la siguiente subrutina de MATLAB:

```
function f=satelite(t,u)
f=zeros(4,1);
denom=(u(1)^2+u(3)^2)^1.5;
f(1)=u(2);
f(2)=-u(1)/denom;
f(3)=u(4);
f(4)=-u(3)/denom;
```

Ahora calculamos y trazamos (ver Figura (7.4)) la solución del problema de valor inicial con la siguiente secuencia de instrucciones en MATLAB. Note que trazamos el conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ para los valores de t generados en lugar de $(t, x(t))$ y $(t, y(t))$. Tenemos entonces:

```
[t,y]=ode45(@satelite,[0,10],[0.4,0,0.1,2]);
plot(y(:,1),y(:,3),'k')
xlabel('x');
ylabel('y');
```

Note que la curva es efectivamente una elipse aunque esto se acentúa en la gráfica porque los ejes tienen unidades de largo distintas. \square

7.3 Ejercicios

Ejercicio 7.1. Usando el método de Euler, halle una aproximación de $y(0.2)$ donde $y(t)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$y'(t) = t^2 + y^2(t), \quad y(0) = 1.$$

Utilice un largo de paso $h = 0.05$ y dé un estimado del error en dicha aproximación.

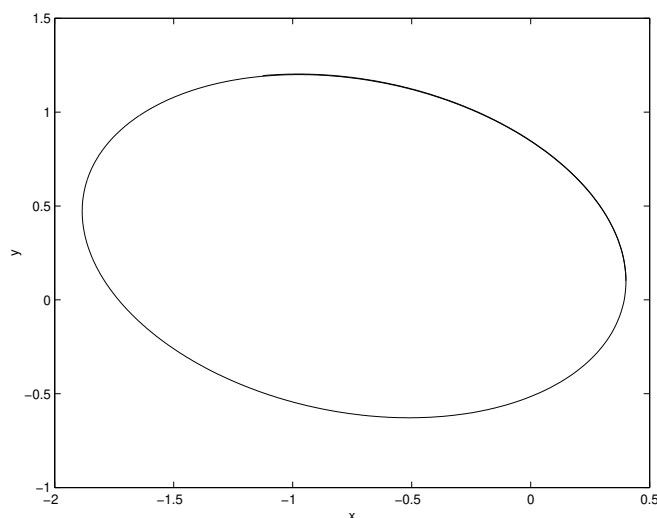


Figura 7.4: Solución particular del problema de dos cuerpos.

Ejercicio 7.2. Convierta la ecuación diferencial de orden dos dada por:

$$tx''(t) - x'(t) - 8t^3x(t)^3 = 0,$$

a un sistema de orden uno. Resuelva el sistema resultante en el intervalo $[1, 4]$ si las condiciones iniciales son $x(1) = 1/2$, $x'(1) = -1/2$. La solución exacta en este problema es $x(t) = 1/(1 + t^2)$.

Ejercicio 7.3. Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando las subrutinas `ode23` o `ode45`:

$$\begin{cases} x''(t) = 2y'(t) + x(t) - \frac{\mu_*(x(t) + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x(t) - \mu_*)}{r_2^3}, \\ y''(t) = -2x'(t) + y(t) - \frac{\mu_*y(t)}{r_1^3} - \frac{\mu y(t)}{r_2^3}, \end{cases}$$

donde $x(0) = 1.2$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1.0493575$, $\mu = 1/82.45$, $\mu_* = 1 - \mu$, y

$$r_1 = \sqrt{(x(t) + \mu)^2 + y(t)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x(t) - \mu_*)^2 + y(t)^2}.$$

Examine los efectos en los cálculos de la tolerancia especificada por el usuario. Trace las soluciones calculadas como funciones de t y en el plano xy .

Ejercicio 7.4. Las ecuaciones de Lorenz están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = s(y(t) - x(t)), \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t), \end{cases}$$

donde s , r , b son parámetros del sistema. Usando `ode45` con una tolerancia de 0.000005 resuelva las ecuaciones de Lorenz para $s = 10$, $r = 126.52$, $b = 8/3$, y con las condiciones iniciales $x(0) = -7.69$, $y(0) = -15.61$, $z(0) = 90.39$. Trace las soluciones calculadas como funciones de t . Trace las soluciones $x(t)$, $z(t)$ en el plano xz . Para los valores de s , r , b dados el sistema de Lorenz exhibe lo que se conoce como comportamiento *caótico*.

Ejercicio 7.5. Considere la ecuación para un péndulo de largo uno dada por:

$$\theta''(t) = -k\theta'(t) - g \operatorname{sen}(\theta(t)), \quad t > 0,$$

donde $g = 32.2$ pies/seg² y $k > 0$. Resuelva ésta ecuación numéricamente para distintos valores de $\theta(0)$, $\theta'(0)$, y k . Haga gráficas de $\theta(t)$ vs t , $\theta'(t)$ vs t , y de $\theta'(t)$ vs $\theta(t)$. Compare las soluciones calculadas con valores distintos de k . ¿Es o no el movimiento del péndulo periódico en el tiempo? ¿Qué pasa cuando la k es “pequeña” o cuando es “grande”?

Ejercicio 7.6. El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)), & x(0) = 5, \\ y'(t) = y(t)(0.75x(t) - 1.5), & y(0) = 2, \end{cases}$$

representa un modelo de presa-depredador donde $x(t)$ es el número (en alguna unidad, digamos miles) de animales presas y $y(t)$ es el número de depredadores en un tiempo t . Resuelva el sistema hasta $t = 1$ y trace las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en el mismo sistema de coordenadas.

Capítulo 8

Problemas de frontera y valor inicial para ecuaciones diferenciales parciales

En este capítulo vamos a discutir varios problemas elementales de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. La característica especial de estos problemas es que los dominios de las funciones bajo consideración son regiones rectangulares. Para este tipo de regiones se puede utilizar la técnica de *separación de variables* con la cuál se puede reducir el problema original de una ecuación diferencial parcial al de varios problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias. La técnica de separación de variables nos lleva de forma natural a considerar *series de Fourier* por lo que en la primera sección de este capítulo veremos una introducción a este tópico. Luego estudiaremos los llamados problemas básicos de la matemática física para las ecuaciones de calor, onda, y Laplace.

8.1 Series de Fourier

Las series de Fourier surgen de los estudios preliminares sobre conducción de calor por el físico Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). La idea original consiste en poder escribir una función $f(x)$ cualquiera como una suma infinita de múltiplos de las funciones trigonométricas \sin y \cos de frecuencia variable. Más específico, Fourier se planteó el problema de cuando es posible encontrar números $\{a_n\}$ y

$\{b_n\}$ tal que¹

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$

Note que para que esta representación sea válida es necesario que f tenga periodo 2π . Las funciones $\{\cos(nx)\}$ y $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ tienen las siguientes propiedades de ortogonalidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m, \\ \pi & , \quad n = m, \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m, \\ \pi & , \quad n = m, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(mx) \, dx = 0, \quad \forall n, m. \quad (8.3)$$

Suponiendo que los procesos de suma e integración son intercambiables en la representación de f de arriba, entonces usando estas propiedades de ortogonalidad, se puede verificar que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \geq 0, \quad (8.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \quad n \geq 1. \quad (8.5)$$

Motivados por estos resultados, presentamos la siguiente definición.

Definición 8.1. Sea f una función integrable localmente y de periodo 2π . La serie de Fourier asociada a f se define por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)],$$

donde los coeficientes $\{a_n, b_n\}$ están dados por (8.4) y (8.5).

Nota: ¡La serie de Fourier asociada a f no tiene que necesariamente ser convergente y aún cuando lo sea no necesariamente converge a f !

¿Cuales son algunas condiciones suficientes para que la serie de Fourier asociada a f , converja a f ? Las funciones que estaremos considerando deben cumplir con la siguiente propiedad. Una función f tiene una *discontinuidad simple* en x_0 si

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

¹El factor de un medio frente al a_0 es solo una normalización para uniformizar unas formulas que veremos más adelante.

ambos existen como números reales y $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$.

Decimos que f tiene una *derivada de derecha* en x_0 si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h},$$

existe. De igual forma, decimos que f tiene una *derivada de izquierda* en x_0 si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^-)}{h},$$

existe. Tenemos ahora:

Teorema 8.2. *Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica con periodo 2π y que en cualquier intervalo acotado, f tiene solamente un número finito de discontinuidades simples. Entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que la derivada de derecha y la derivada de izquierda ambas existan, tenemos que la serie de Fourier asociada a f converge a*

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)],$$

en $x = x_0$. En particular, si f es continua en x_0 , entonces la serie de Fourier de f converge a $f(x_0)$ en $x = x_0$.

Ejemplo 8.3. Consideremos la función

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Esta función podemos pensar que esta definida en todo \mathbb{R} si la extendemos usando periodicidad. Los coeficientes de Fourier $\{a_n\}$ de f están dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \, dx, \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} & , \quad n = 0, \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} & , \quad n \geq 1, \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes $\{b_n\}$ de f son:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \, dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}, \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

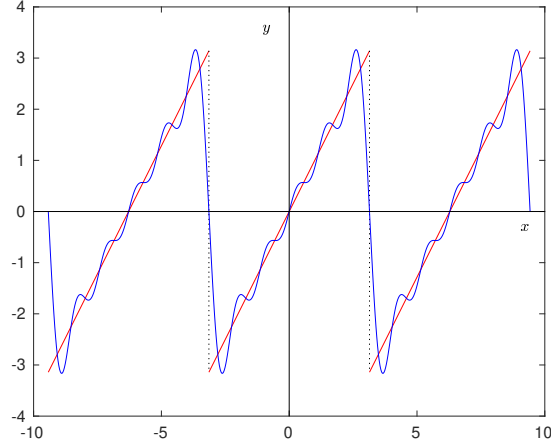


Figura 8.1: Gráfica de la función f del Ejemplo 8.3 (rojo) y la correspondiente quinta suma parcial de su serie de Fourier (azul).

Tenemos entonces que f se puede escribir en términos de su serie de Fourier como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx), \quad -\pi < x < \pi,$$

es decir que

$$x = 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \dots, \quad -\pi < x < \pi.$$

Para $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, la serie tiene valor de cero que es el promedio de $f(n\pi^+)$ y $f(n\pi^-)$. En la Figura 8.1 mostramos parte de la gráfica de f (tres ciclos) y la suma parcial

$$s_5(x) = \sum_{n=1}^5 (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx),$$

de los primeros cinco términos de la serie de Fourier de f . □

Intervalos arbitrarios

Suponga que f es periódica con periodo $2L$. Si definimos la función g por:

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi} t\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

entonces g es periódica con periodo 2π . Veamos

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}t + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right) = g(t),$$

donde usamos que f es periódica con periodo $2L$. Los coeficientes de Fourier de g son:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \cos(nt) dt, \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde usamos el cambio de variables $x = \frac{L}{\pi}t$. De igual forma se obtiene que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (8.7)$$

Tomando ahora la serie de Fourier de g y utilizando el cambio de variables $x = \frac{L}{\pi}t$ nuevamente, llegamos a que la serie de Fourier de f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (8.8)$$

donde los a_n 's y b_n 's se calculan de acuerdo a las formulas (8.6) y (8.7). Note que cuando $L = \pi$ estas formulas reducen al caso original de periodo 2π por lo que podemos utilizar estas formulas en general.

Ejemplo 8.4. Trabajamos el caso en que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 \leq x < 0, \\ 1 & , \quad 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

donde f se extiende a todo \mathbb{R} por periodicidad. Tenemos usando las formulas (8.6) que

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0, \\ 0 & , \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Para las formulas (8.7) tenemos ahora que

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1), \quad n \geq 1.$$

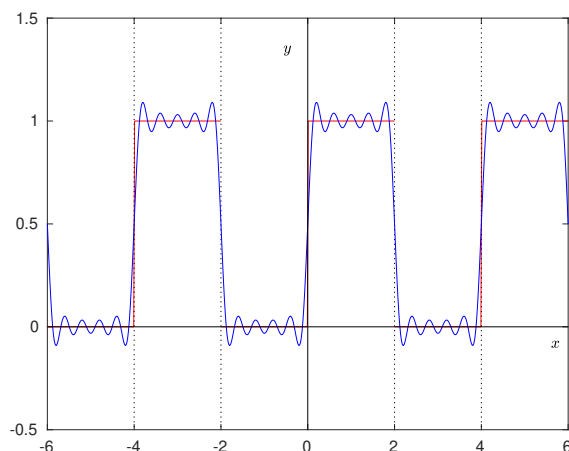


Figura 8.2: Gráfica de la función f del Ejemplo 8.4 (rojo) y la correspondiente quinta suma parcial de su serie de Fourier (azul).

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right), \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right), \quad x \in (-2, 0) \cup (0, 2). \end{aligned}$$

Para $x = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, la serie tiene valor de $\frac{1}{2}$ el cual es el promedio de $f(2m^+)$ y $f(2m^-)$. En la Figura 8.2 mostramos parte de la gráfica de f (tres ciclos) y la suma parcial

$$s_5(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^5 \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right).$$

□

Series de Fourier de senos o de cosenos

Cuando la función f en la serie de Fourier es par, es decir

$$f(-x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

es fácil ver que $b_n = 0$ para todo n . Además

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (8.9)$$

La serie de Fourier de f reduce entonces a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.10)$$

donde los $\{a_n\}$ se calculan con la formula de arriba. A este tipo de serie de Fourier se le llama una *serie de cosenos*.

Cuando f es impar, es decir

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces $a_n = 0$ para toda n y la serie de Fourier de f reduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.11)$$

donde ahora

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (8.12)$$

A este tipo de serie de Fourier se le llama una *serie de senos*.

Note que una función $f(x)$ cualquiera definida para $x \in [0, L]$, se puede representar tanto por una serie de cosenos como por una serie senos. Esto es consecuencia de que f se puede extender a una función par sobre $[-L, L]$ con la definición:

$$f(x) = f(-x), \quad x \in [-L, 0], \quad (8.13)$$

o a una función impar en $[-L, L]$ con la definición:

$$f(x) = -f(-x), \quad x \in [-L, 0], \quad (8.14)$$

Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo 8.5. Vamos a calcular las series de Fourier de cosenos y la de senos para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Usando (8.9) es fácil ver que

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0, \\ \frac{2(-1)^k}{\pi 2k+1} & , \quad n = 2k+1, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Tenemos usando (8.10) que la serie de cosenos de f es

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \quad (8.15)$$

Ahora calculando con (8.12) tenemos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Usando (8.11) tenemos que la serie de senos de f es:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \quad (8.16)$$

□

8.2 La Ecuación de Calor

Consideramos el problema de hallar la distribución de calor en una barra de metal de largo L . Si $u(x, t)$ denota la temperatura de la barra en la posición x y en tiempo t , entonces se puede verificar, utilizando entre otras cosas la llamada *ley de Fourier*, que dicha distribución de calor satisface las siguientes ecuaciones:

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.17a)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.17b)$$

$$u(0, t) = A(t), \quad u(L, t) = B(t), \quad t \geq 0. \quad (8.17c)$$

La ecuación (8.17a) se obtiene a partir del principio de conservación de calor, mientras que (8.17b) y (8.17c) describen la temperatura inicial de la barra y las temperaturas en los extremos de ésta (como función del tiempo t) respectivamente. La constante k es el coeficiente de difusión térmica de la barra mientras que F representa una densidad de fuentes internas de calor. El problema (8.17) es un ejemplo de un *problema de frontera y valor inicial*.

Para resolver (8.17) primero hacemos un cambio de variables para transformar este problema a uno donde la $A(t)$ y $B(t)$ sean cero ambas. Definimos a este fin las funciones:

$$r(x, t) = A(t) + \frac{x}{L} (B(t) - A(t)),$$

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - r(x, t),$$

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) - r_t(x, t), \quad \bar{f}(x) = f(x) - r(x, 0).$$

Es fácil ver ahora que $\bar{u}(x, t)$ es solución del problema:

$$\bar{u}_t(x, t) - k\bar{u}_{xx}(x, t) = \bar{F}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.18a)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{f}(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.18b)$$

$$\bar{u}(0, t) = 0, \quad \bar{u}(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.18c)$$

La función $\bar{u}(x, t)$ se puede escribir como:

$$\bar{u}(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

donde $v(x, t)$ es solución de:

$$v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.19a)$$

$$v(x, 0) = \bar{f}(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.19b)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.19c)$$

y $w(x, t)$ es solución de:

$$w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t) = \bar{F}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.20a)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.20b)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.20c)$$

Tenemos entonces que

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + r(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + r(x, t).$$

Solución del problema (8.19)

Para resolver el problema (8.19) utilizamos la técnica de *separación de variables*. Suponemos que $v(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en (8.19a) y simplificando obtenemos que

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

para alguna constante λ . Esto nos lleva a que

$$T'(t) = -\lambda kT(t), \quad X''(x) = -\lambda X(x),$$

de donde obtenemos que

$$T(t) = e^{-\lambda kt}, \quad X(x) = a \cos \sqrt{\lambda}x + b \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x.$$

Las condiciones de frontera (8.19c) implican que $X(0) = 0 = X(L)$ por lo que

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ X(x) &= X_n(x) = \text{sen } \sqrt{\lambda_n}x = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Tenemos ahora que

$$v(x, t) = v_n(x, t) = e^{-\lambda_n kt} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

satisfacen (8.19a) y (8.19c). Para trabajar con la condición inicial (8.19b), escribimos la solución de (8.19) en una serie de Fourier de senos de la forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n kt} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (8.21)$$

La condición inicial (8.19b) es equivalente ahora a

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

de donde obtenemos que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \bar{f}(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.22)$$

Combinando (8.21) y (8.22), tenemos una solución, al menos formal, del problema (8.19).

Solución del problema (8.20)

Para resolver (8.20) utilizamos de entrada series de Fourier de senos. Comenzamos multiplicando (8.20a) por $\text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e integramos sobre $[0, L]$. Si definimos²

$$\begin{aligned}w_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L w(x, t) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1, \\ \bar{F}_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L \bar{F}(x, t) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

²Note que $w_n(t)$ y $\bar{F}_n(t)$ son los coeficientes de Fourier en las series de senos para las funciones $w(\cdot, t)$ y $\bar{F}(\cdot, t)$ respectivamente, donde t está fija.

entonces usando (8.20c) e integración por partes llegamos a que w_n satisface la siguiente ecuación diferencial lineal de orden uno:

$$w'_n(t) + k\lambda_n w_n(t) = \bar{F}_n(t), \quad n \geq 1.$$

Usando (8.20b) vemos que $w_n(0) = 0$ por lo que la solución de la ecuación anterior es

$$w_n(t) = e^{-\lambda_n kt} \left[\int_0^t e^{\lambda_n ks} \bar{F}_n(s) ds \right], \quad n \geq 1.$$

Como las funciones $\{w_n(t)\}$ son los coeficientes en la serie de Fourier de senos en x de $w(\cdot, t)$, tenemos que

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n kt} \left[\int_0^t e^{\lambda_n ks} \bar{F}_n(s) ds \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ejemplo 8.6. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) &= 0, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 100, & 0 \leq x \leq L, & \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) = 0, & \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Este problema es del tipo (8.19) donde $\bar{f}(x) = 100$. Tenemos entonces usando (8.21) que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n kt} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

y los c_n 's según (8.22), están dados por:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L 100 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{200}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1], \quad n \geq 1.$$

Note que $c_n = 0$ si n es par por lo que tenemos finalmente que

$$u(x, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\lambda_{2n-1} kt} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right). \quad (8.23)$$

En la Figura 8.3 mostramos una aproximación a la solución $u(x, t)$ usando 20 términos en la sumatoria de la serie anterior, con $L = \pi$, $k = 1$, y para $0 \leq t \leq 5$. \square

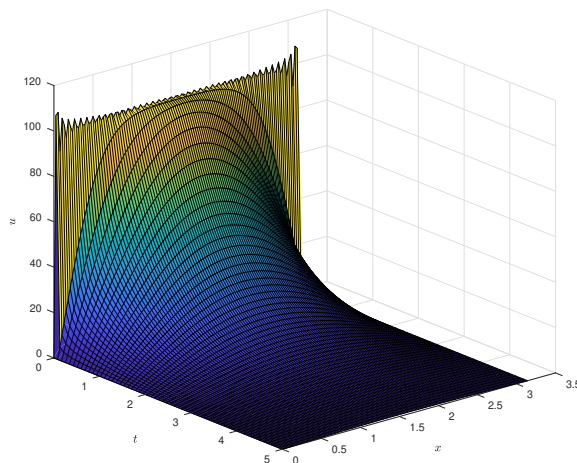


Figura 8.3: Gráfica de la solución en serie (8.23) usando los primeros 20 términos de dicha serie.

8.3 La Ecuación de Onda

Las vibraciones de una cuerda de largo L , atada a los extremos, y sometida a una fuerza externa $F(x, t)$ por unidad de largo, se pueden describir mediante el problema de frontera y valor inicial:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.24a)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.24b)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.24c)$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ describen respectivamente³, la forma inicial de la cuerda y la velocidad inicial de cada punto de ésta. La constante c caracteriza las propiedades mecánicas del material de la cuerda. Note que $u = v + w$ donde v, w son soluciones de los siguientes subproblemas:

$$v_{tt}(x, t) - c^2 v_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.25a)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.25b)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8.25c)$$

³Para consistencia entre (8.24b)₁ y 8.24c, es necesario que $f(0) = 0 = f(L)$.

y

$$w_{tt}(x, t) - c^2 w_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8.26a)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.26b)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.26c)$$

Solución del problema (8.25)

Para resolver el problema (8.25) utilizamos separación de variables. Suponemos que $v(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en (8.25a) y simplificando obtenemos que

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

para alguna constante λ . Esto nos lleva a que

$$T''(t) = -\lambda c^2 T(t), \quad X''(x) = -\lambda X(x).$$

Usando las condiciones de frontera (8.25c), obtenemos igual que antes que

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ X(x) &= X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x = \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Usando la expresión de los λ_n 's y la ecuación diferencial de $T(t)$, tenemos que

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= T_n(t)X_n(t) \\ &= \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

satisfacen (8.25a) y (8.25c). Para trabajar con las condiciones iniciales (8.25b), escribimos la solución de (8.25) en una serie de Fourier de senos en la variable x , de la forma

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (8.27) \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales (8.25b) son ahora equivalentes a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

de donde obtenemos que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (8.28a)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.28b)$$

Solución del problema (8.26)

Trabajando en forma similar a la ecuación de calor, definimos

$$w_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L w(x, t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 1, \quad (8.29)$$

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 1, \quad (8.30)$$

Ahora multiplicamos (8.26a) por $\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$, integramos sobre $[0, L]$, usamos (8.26c) e integración por partes, para obtener que

$$w_n''(t) + c^2 \lambda_n w_n(t) = F_n(t), \quad n \geq 1.$$

Usando (8.26b) vemos que $w_n(0) = 0 = w_n'(0)$ por lo que la solución de la ecuación anterior, usando el método de variación de parámetros, es

$$w_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n \geq 1.$$

Note que las funciones $\{w_n(t)\}$ son los coeficientes en la serie de Fourier de senos en x de $w(\cdot, t)$, de modo que

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (8.31)$$

Ejemplo 8.7. Consideramos las vibraciones libres, esto es $F(x, t) = 0$, de una cuerda de largo L atada a los extremos donde la velocidad inicial $g(x)$ es cero y el desplazamiento inicial es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ 2 - \frac{2}{L} x & , \quad \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

Como $g(x) = 0$ y $F(x, t) = 0$ tenemos de (8.28b) y (8.31) que $b_n = 0$ para toda n y que $w(x, t) = 0$. Además, a partir de (8.28a) tenemos que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(\frac{2}{L}\right)^2 \int_0^{\frac{L}{2}} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L \left[2 - \frac{2}{L}x\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \left(\frac{2}{L}\right)^2 \left(-\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\
 &\quad - \left(\frac{2}{L}\right)^2 \left(-\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L \\
 &\quad - \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ par,} \\ \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} & , \quad n = 2k + 1, \quad k \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.27) tenemos que la solución $u(x, t)$ de (8.24) esta dada en este caso por

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi ct}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right). \quad (8.32)$$

En la Figura 8.4 mostramos una aproximación a la solución $u(x, t)$ usando 40 términos en la sumatoria de la serie anterior, con $L = \pi$, $c = 1$, y para $0 \leq t \leq 2\pi$. \square

8.4 La Ecuación de Laplace

Vamos a estudiar ahora un problema de frontera que entre otras muchas aplicaciones o interpretaciones, describe la distribución de calor en reposo o equilibrio de una placa de metal rectangular. Suponemos que la placa descansa o ocupa la región del plano dada por

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H\}.$$

Si $u(x, y)$ representa la temperatura de la placa en el punto $(x, y) \in R$, entonces bajo ciertas condiciones físicas y matemáticas, $u(x, y)$ satisface el siguiente *problema*

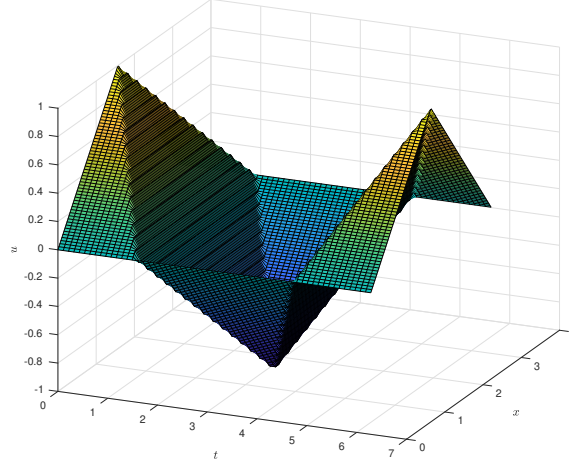


Figura 8.4: Gráfica de la solución en serie (8.32) usando los primeros 40 términos de dicha serie.

de frontera de tipo Dirichlet

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad (8.33a)$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u(x, H) = g_2(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8.33b)$$

$$u(0, y) = g_3(y), \quad u(L, y) = g_4(y), \quad 0 \leq y \leq H. \quad (8.33c)$$

Las funciones g_i 's son dadas o conocidas y representan la temperatura en los bordes de la placa. Las condiciones (8.33b) y (8.33c) se llaman las *condiciones de frontera*.

Buscamos soluciones de (8.33a) separables de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Sustituyendo en (8.33a) y re-arreglando se obtiene que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

para alguna constante λ . De aquí se obtiene que

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Vamos ahora a considerar el caso especial en que $g_3(x) = g_4(x) = 0$ para toda x . Se desprende entonces de la expresión $u(x, y) = X(x)Y(y)$ que $X(0) = 0$ y que

$X(L) = 0$. Igual que en casos anteriores, tenemos que

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 1.$$

De la ecuación diferencial para $Y(y)$ y usando los valores de los λ_n , tenemos que

$$Y(y) = Y_n(y) = a_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + b_n e^{\frac{n\pi y}{L}}, \quad n \geq 1.$$

Podemos concluir que al menos formalmente, la serie

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + b_n e^{\frac{n\pi y}{L}} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.34)$$

satisface (8.33a) y (8.33c). Usando ahora la primera de las condiciones de frontera (8.33b) y la serie anterior para $u(x, y)$, tenemos que

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Es decir, los coeficientes $\{a_n + b_n\}$ son los coeficientes de Fourier de g_1 en su correspondiente serie de senos y por consiguiente tenemos que

$$a_n + b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (8.35)$$

La segunda condición de frontera en (8.33b) implica que

$$g_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-\frac{n\pi H}{L}} + b_n e^{\frac{n\pi H}{L}} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Tenemos ahora que la expresión en corchetes corresponde a los coeficientes de Fourier de g_2 en su serie de senos, por lo que tenemos

$$a_n e^{-\frac{n\pi H}{L}} + b_n e^{\frac{n\pi H}{L}} = \frac{2}{L} \int_0^L g_2(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (8.36)$$

Las ecuaciones (8.35) y (8.36) forman un sistema de ecuaciones lineales para a_n, b_n que podemos resolver para cada $n \geq 1$, siempre que tengamos los coeficientes de Fourier de senos de g_1 y g_2 .

Ejemplo 8.8. Tomamos el caso en que $L = H = \pi$ y con $g_1 = 0$. Entonces de (8.35) tenemos que $a_n = -b_n$, y usando esto a su vez en (8.36) obtenemos que

$$b_n = \frac{1}{\pi \sinh(n\pi)} \int_0^{\pi} g_2(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

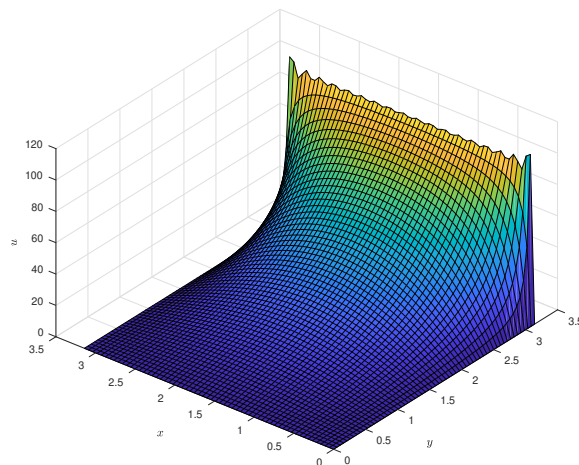


Figura 8.5: Gráfica de la solución en serie (8.37) usando los primeros 40 términos de dicha serie para el caso $g_2 = 100$.

Usando estos resultados en (8.34), tenemos que la solución del problema de frontera (8.33) en este caso es:

$$u(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(ny) \operatorname{sen}(nx). \quad (8.37)$$

Para el caso en que $g_2 = 100$, los coeficientes b_n están dados por

$$b_n = \frac{200}{n\pi \sinh(n\pi)}, \quad n \text{ impar.}$$

En la Figura 8.5 mostramos una aproximación a la serie (8.37) en este caso utilizando 40 términos en la sumatoria de la serie. \square

8.5 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Halle los valores de λ (*autovalores*) para los cuales el problema de frontera:

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

tiene solución no trivial, es decir que y no sea idénticamente cero. Las soluciones y no triviales de este problema se llaman las *auto-funciones* asociadas al valor de λ correspondiente.

Ejercicio 8.2. Halle la solución del siguiente *problema de frontera*:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10.$$

Primero encuentre la solución general de la ecuación diferencial, y luego aplica las condiciones de frontera para determinar las constantes en la solución general.

Ejercicio 8.3. Las funciones

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0, \\ \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x)) & , \quad n \geq 1, \end{cases}$$

se llaman los *polinomios de Tchebichef*. (Se puede verificar que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n para toda $n \geq 1$.) Verifique que las funciones $\{T_n(x)\}$ satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad en el intervalo $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad n \neq m.$$

Ejercicio 8.4. Construya una serie de Fourier para cada una de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = |x|$, $-2 \leq x \leq 2$.
- b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < 1, \\ 1 & , \quad 1 < x < 2. \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0, \\ \text{sen}(x) & , \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 \leq x < 0, \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Ejercicio 8.5. Calcule las series de cosenos y de senos, ambas, para $f(x) = e^x$ donde $0 \leq x \leq \pi$.

Ejercicio 8.6. Calcule la serie de cosenos para $f(x) = |\cos(x)|$ donde $0 \leq x \leq \pi$.

Ejercicio 8.7. Verifique que las series que aparecen en las ecuaciones (8.15) y (8.16) del Ejemplo (8.5) reducen ambas a $\frac{1}{2}$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 8.8. Una barra de metal de largo L y fuentes internas de calor cero, tiene una distribución de temperatura inicial dada por

$$f(x) = \begin{cases} A & , \quad 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ 0 & , \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Si el lado en $x = 0$ se mantiene aislado térmicamente a temperatura A mientras que el lado $x = L$ se mantiene a temperatura cero, determine la distribución de calor en la barra como función de la posición y el tiempo.

Ejercicio 8.9. Considere el problema de determinar la distribución de temperatura en una barra de cobre de 100 cm de largo y cuyos extremos se mantienen a 0°C para todo $t > 0$. Halle una expresión para la temperatura $u(x, t)$ de la barra si la distribución inicial de temperatura es:

$$u(x, 0) = 50, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Ejercicio 8.10. Considere una barra de metal de largo π donde la densidad de fuentes internas de calor es constante, i.e., $F(x, t) = F_0$ para todo (x, t) , donde F_0 es constante. Si los extremos de la barra se mantienen aislados térmicamente a temperatura cero, determine la distribución de calor en la barra como función del tiempo dado que la temperatura inicial de la barra es $f(x) = T_0x(\pi - x)$, T_0 una constante.

Ejercicio 8.11. Una cuerda descansa inicialmente sobre el eje de x con sus extremos en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Determine el movimiento subsiguiente de la cuerda si ésta se somete al efecto de una fuerza externa proporcional a $\text{sen}(\pi x)$ en cada punto de la cuerda.

Ejercicio 8.12. Una cuerda de largo uno y atada a los extremos se pone a vibrar con una velocidad inicial de cero y configuración inicial de

$$u(x, 0) = 0.001 \text{sen}(3\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Halle el desplazamiento de la cuerda $u(x, t)$ para $t \geq 0$.

Ejercicio 8.13. Considere el problema de calcular la temperatura de equilibrio en el centro de una placa metálica cuadrada.

a) Resuelva el problema de frontera correspondiente asumiendo que tres de los bordes de la placa se mantienen a 0°C y el lado restante se mantiene a 100°C .

- b) Resuelva el problema de frontera correspondiente si dos bordes adyacentes de la placa se mantienen a $0^\circ C$ y los otros dos restantes se mantienen a $100^\circ C$.
Ayuda: Expresé o escriba la solución al problema donde los cuatro lados se mantienen a $100^\circ C$ como la suma o superposición de problemas similares al de la parte (a).

Ejercicio 8.14. Una lamina rectangular de metal y homogénea ocupa la región

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}.$$

No hay fuentes internas de calor y las caras de la lamina están aisladas. El borde $y = 0$ se mantiene a una temperatura de $T \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ grados para $0 \leq x \leq a$, donde T es una constante. Los otros bordes se mantienen a cero grados de temperatura. Halle la temperatura de equilibrio $u(x, y)$ de la lamina.

Ejercicio 8.15. Considere el movimiento de una cuerda atada a los extremos, vibraciones libres, en un medio que produce fricción. Las ecuaciones que describen este problema son:

$$u_{tt} + 2\gamma u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (8.38)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8.39)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq b. \quad (8.40)$$

- a) Usando separación de variables verifique que

$$u_n(x, t) = e^{-\gamma t} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \quad n \geq 1,$$

satisface (8.38) y (8.39) donde

$$\omega_n = \left(\frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2} - \gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- b) Usando el resultado de la parte anterior verifique que la solución formal del problema (8.38), (8.39), y (8.40) está dada por la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{\gamma A_n}{\omega_n} + \frac{2}{b\omega_n} \int_0^b g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

Ejercicio 8.16. Halle la temperatura en equilibrio $u(x, y)$ de una placa cuadrada con lados de largo uno y sujeta a las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 1 - y, & 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) &= 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Nota: Las fórmulas de este capítulo no aplican directamente a este problema.

Ejercicio 8.17. Considere el problema mixto:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Por los resultados de este capítulo, tenemos que la solución $u(x, t)$ tiene la representación:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \\ B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Suponga que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in [0, \pi]$.

- a) Utilizando que $|\sin(w)| \leq 1$ para todo w , verifique que $|B_n| \leq 2M$ para toda $n \geq 1$.
- b) Usando que $e^{-n^2 t} \leq e^{-nt}$, verifique que

$$|u(x, t)| \leq 2M \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Ayuda: Recuerde que $r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{r}{1-r}$ si $|r| < 1$.

- c) Concluya de la parte (b) que $u(x, t) \rightarrow 0$ según $t \rightarrow \infty$ uniforme en x .

Capítulo 9

Sistemas $n \times n$ de Ecuaciones Diferenciales Lineales

En este capítulo retomamos el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales que comenzamos en el Capítulo 4, pero para el caso de n ecuaciones para n funciones desconocidas y para sistemas lineales. En este caso veremos que es posible bajo ciertas condiciones, obtener una representación para la solución del sistema. En el caso de sistemas homogéneos y de coeficientes constantes, vamos a estudiar la *estabilidad* del sistema, o sea, cuán susceptible es la solución del sistema a cambios en las condiciones iniciales, similar al caso 2×2 estudiado en el Capítulo 4.

9.1 Notación y Definiciones

Suponga que $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ son funciones diferenciables, y que $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ y $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ son funciones continuas en un intervalo I . Consideramos el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales* de primer orden y $n \times n$ dado por:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\x'_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\&\vdots \\x'_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Este sistema lo podemos escribir en forma matricial como

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t),\tag{9.2}$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$ y

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^t, \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^t.$$

Ejemplo 9.1. Anteriormente en nuestra discusión sobre mezclas en un tanque, vimos que la ecuación diferencial básica que describe la cantidad $x(t)$ de solúto en el tanque en tiempo t está dada por:

$$\frac{dx}{dt}(t) = r_i c_i - r_o c_o,$$

donde c_i es la concentración de la solución que entra al tanque con rapidez o tasa de r_i , y c_o, r_o son las correspondientes cantidades pero saliendo del tanque. Recuerde que si r_i, r_o son constantes, entonces

$$c_o = \frac{x(t)}{V_0 + (r_i - r_o)t},$$

donde V_0 es el volumen inicial de la mezcla en el tanque. En el caso especial que $r_i = r_o = r$ la ecuación diferencial de arriba reduce a

$$\frac{dx}{dt}(t) = r c_i - k x(t), \quad k = \frac{r}{V_0}.$$

Consideremos ahora el caso de tres tanques donde la mezcla del tanque uno pasa al tanque dos, la del tanque dos al tanque tres y la del tanque tres sale del sistema de tanques. El modelo de arriba sigue describiendo la cantidad de solúto en cada tanque. Si los volúmenes iniciales de los tanques son $V_i, i = 1, 2, 3$, y $x_i(t)$ denota la cantidad de solúto en el tanque $i, i = 1, 2, 3$, entonces tenemos que la concentración de la mezcla que entra al tanque dos es $x_1(t)/V_1$ y la que entra en el tanque tres es $x_2(t)/V_2$. Aplicando la ecuación diferencial básica a cada tanque, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= r c_i - k_1 x_1(t), & k_1 &= r/V_1, \\ x_2'(t) &= k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t), & k_2 &= r/V_2, \\ x_3'(t) &= k_2 x_2(t) - k_3 x_3(t), & k_3 &= r/V_3. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Este sistema se puede escribir de la forma (9.2) donde

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} r c_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

El siguiente resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones del sistema (9.2) será utilizado con frecuencia en este capítulo.

Teorema 9.2 (Existencia y unicidad para sistemas lineales). *Suponga que las funciones $A(t) = (a_{ij}(t))$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas en el intervalo (a, b) . Entonces para cualquier $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$, el PVI:*

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in (a, b), \quad (9.4)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (9.5)$$

tiene una solución que es única y cuyo intervalo máximo de existencia es (a, b) .

9.2 Sistemas Homogéneos

El sistema homogéneo asociado a (9.2) es cuando $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, esto es

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t). \quad (9.6)$$

Tenemos ahora que:

Teorema 9.3 (Principio de superposición). *Si $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ son soluciones de (9.6), entonces $\alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t)$ es solución de (9.6) para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En particular, el conjunto de las soluciones de (9.6) forma un subespacio vectorial del conjunto de funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$.*

Demostración: Usando la linealidad del operador derivada tenemos que

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t))' &= \alpha\mathbf{x}'(t) + \beta\mathbf{y}'(t), \\ &= \alpha A(t)\mathbf{x}(t) + \beta A(t)\mathbf{y}(t), \\ &= A(t)(\alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t)). \end{aligned}$$

□

9.2.1 Independencia Lineal

Sean $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ funciones continuas de $[a, b]$ a \mathbb{R}^n . Decimos que estas funciones son *linealmente dependientes* en $[a, b]$ si existen constantes c_1, c_2, \dots, c_m no todas cero tal que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_m\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (9.7)$$

De lo contrario decimos que las funciones son *linealmente independientes* en $[a, b]$. Esto es, las funciones son linealmente independientes en $[a, b]$ si la única forma que la identidad (9.7) se puede cumplir es con $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$.

Ejemplo 9.4. Considere las funciones $\cos(t), \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Suponga que existen constantes c_1, c_2 tal que

$$c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como la identidad debe ser válida para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos tomar valores particulares de t . Por ejemplo si $t = 0$, entonces la identidad de arriba reduce a que $c_1 = 0$. Tomando $t = \pi/2$, obtenemos que $c_2 = 0$. Por lo tanto, las funciones $\cos(t), \sin(t)$ son linealmente independientes en \mathbb{R} . De hecho, son linealmente independientes en cualquier intervalo (a, b) de números reales. \square

En el caso de n soluciones de (9.6), tenemos una caracterización de independencia lineal en términos de un determinante. Definimos el *Wronskiano* de $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ por

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)). \quad (9.8)$$

Tenemos ahora que:

Teorema 9.5. Sean $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ soluciones de (9.6) en el intervalo $[a, b]$. Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en $[a, b]$ si y solo si

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0, \quad (9.9)$$

para algún $t_0 \in [a, b]$.

Demostración: Suponga $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en $[a, b]$ pero que $W(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea $t_0 \in [a, b]$ un punto cualquiera. Entonces la matriz

$$(\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)),$$

es singular por lo que existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n no todos cero tal que

$$c_1 \mathbf{x}_1(t_0) + c_2 \mathbf{x}_2(t_0) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Defina

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t).$$

Por el Teorema 9.3, \mathbf{y} es solución de (9.6) y además, por la ecuación anterior, satisface la condición inicial de que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Por el teorema de existencia y unicidad (Teorema 9.2), $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ para toda $t \in [a, b]$, es decir

$$c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Como $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en $[a, b]$, tenemos que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ lo cuál contradice que los escalares no son todos cero. Por lo tanto (9.9) se cumple.

Por el contrario, suponga que (9.9) se cumple y que existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$$c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b],$$

Evaluando en t_0 y observando que la matriz de coeficientes del sistema lineal homogéneo que resulta es noringular por (9.9), entonces tenemos que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, lo que implica que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en $[a, b]$. \square

En forma similar se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 9.6. Sean $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ soluciones de (9.6) en el intervalo $[a, b]$. Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en $[a, b]$ si y solo si

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (9.10)$$

Ejemplo 9.7. Note que

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix},$$

son soluciones del sistema (9.6) en \mathbb{R} donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos ahora que

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det \begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^{-5t} \\ 2e^{2t} & 3e^{-5t} \end{pmatrix} = 7e^{-3t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por el Teorema 9.5, las funciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son linealmente independientes en \mathbb{R} . \square

Teorema 9.8. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ soluciones de (9.6) linealmente independientes en $[a, b]$. Sea $\mathbf{y}(t)$ una solución cualquiera de (9.6) en $[a, b]$. Entonces existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

En particular, el conjunto de las soluciones de (9.6) forma un subespacio vectorial de dimensión n del conjunto de las funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$.

Demostración: Sea $\mathbf{y}(t)$ una solución cualquiera de (9.6) en $[a, b]$. Para cualquier $t_0 \in [a, b]$ considere el sistema de ecuaciones lineales

$$c_1 \mathbf{x}_1(t_0) + c_2 \mathbf{x}_2(t_0) + \cdots + c_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{y}(t_0).$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es $W(t_0) \neq 0$ por el Teorema 9.6. De modo que este sistema tiene una solución única c_1, c_2, \dots, c_n . Tenemos pues ahora que

$$\mathbf{w}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}_n(t),$$

y $\mathbf{y}(t)$ son ambas soluciones de (9.6) en $[a, b]$ con la misma condición inicial en t_0 . Por el teorema de existencia y unicidad (Teorema 9.2), $\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}(t)$ para toda $t \in [a, b]$ lo cual es el resultado deseado. \square

Cuando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son soluciones de (9.6) linealmente independientes en $[a, b]$, el Teorema 9.8 implica que

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + c_n \mathbf{x}_n,$$

es la solución general de (9.6). En este caso decimos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ forma un *conjunto fundamental* para (9.6) en $[a, b]$. La matriz

$$\Phi(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)), \quad t \in [a, b], \quad (9.11)$$

se llama una *matriz fundamental* para el sistema (9.6). El resultado del Teorema 9.8 se puede expresar ahora de la siguiente forma: cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ de (9.6) en $[a, b]$ se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}, \quad t \in [a, b], \quad (9.12)$$

para algún $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Es fácil ver que el sistema (9.6) siempre posee un conjunto de n soluciones linealmente independientes. Para ver esto, tomemos $t_0 \in [a, b]$ y defina \mathbf{x}_k como la solución de (9.6) que satisface la condición inicial

$$\mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

donde \mathbf{e}_k es un vector con todos los componentes cero excepto por la posición k que es uno¹. Por el teorema de existencia y unicidad (Teorema 9.2), $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ existen, son únicas, y están definidas en $[a, b]$. Como

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) = \det I = 1 \neq 0,$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$, entonces por el Teorema 9.5, las funciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes.

¹Los \mathbf{e}_k 's son las columnas de la matriz identidad $n \times n$.

9.2.2 Problema de valor inicial

Considere el problema de valor inicial dado por (9.6) sujeto a la condición inicial:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es dado y $t_0 \in [a, b]$. Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son soluciones de (9.6) linealmente independientes en $[a, b]$, entonces por el Teorema 9.8 existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Para determinar las constantes en esta expansión, sustituimos $t = t_0$ y usamos la condición inicial para obtener que

$$c_1 \mathbf{x}_1(t_0) + c_2 \mathbf{x}_2(t_0) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{b}. \quad (9.13)$$

Si definimos

$$B = (\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t, \quad (9.14)$$

entonces (9.13) es equivalente al sistema lineal $B\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Por el Teorema 9.6 la matriz B es no singular y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ejemplo 9.9. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos que

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix},$$

son soluciones linealmente independientes en \mathbb{R} del sistema. Como

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

evaluando ésta expresión en $t = 0$, y usando la condición inicial obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos que $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{x}_1(t) - 3\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_3(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es la solución del problema de valor inicial dado. \square

Note que la matriz B en (9.14) se puede escribir como $B = \Phi(t_0)$, donde Φ es la matriz fundamental (9.11). Así que la solución \mathbf{c} del sistema $B\mathbf{c} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{c} = \Phi(t_0)^{-1}\mathbf{b} = \Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0)$. Usando (9.12) tenemos que la solución del PVI para (9.6) y condición inicial en $t = t_0$, se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0). \quad (9.15)$$

9.3 Sistemas No-homogéneos

Vamos ahora a estudiar el sistema no-homogéneo (9.2). Note que si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ son soluciones de (9.2), entonces $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ es solución de (9.6) ya que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t))' &= \mathbf{y}'_1(t) - \mathbf{y}'_2(t), \\ &= (A(t)\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{f}(t)) - (A(t)\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{f}(t)), \\ &= A(t)(\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)). \end{aligned}$$

Usando ésto tenemos que:

Teorema 9.10. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes de (9.6) en $[a, b]$. Sea \mathbf{y}_p una solución particular de (9.2) y \mathbf{y} cualquier otra solución de (9.2) en $[a, b]$. Entonces existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_p.$$

Demostración: Basta con observar que $\mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ es solución de (9.6) y que cualquier solución de (9.6) es combinación lineal de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. \square

Necesitamos ahora construir soluciones particulares \mathbf{y}_p de (9.2). El método que vamos a ver para hacer esto es una generalización del método de variación de parámetros discutido en el Capítulo 3 para ecuaciones escalares de orden dos. La idea es tratar de encontrar una función $\mathbf{v}(t)$ tal que $\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t)$ sea solución de (9.2) donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental de (9.6). Si calculamos las derivadas correspondientes y usamos que la matriz fundamental $\Phi(t)$ satisface que

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t),$$

tenemos que $\phi(t)$ es solución de (9.2) si y solo si

$$\Phi(t)\mathbf{v}'(t) = \mathbf{f}(t).$$

Despejando e integrando obtenemos que

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi) d\xi,$$

para cualquier $t_0 \in [a, b]$. De aquí que

$$\mathbf{y}_p(t) \equiv \boldsymbol{\phi}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\xi) \mathbf{f}(\xi) d\xi, \quad t \in [a, b], \quad (9.16)$$

es solución de (9.2) en $[a, b]$ tal que $\mathbf{y}_p(t_0) = \mathbf{0}$. Combinando este resultado con el teorema anterior tenemos que:

Teorema 9.11. *Considere el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in [a, b], \\ \mathbf{y}(t_0) &= \boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

donde $t_0 \in [a, b]$ y $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ son dados. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo (9.6). Entonces la solución del PVI está dada por

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\xi) \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Demostración: Sabemos por el Teorema 9.10 que

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \mathbf{y}_p(t),$$

donde $\mathbf{y}_p(t)$ está dada por la formula (9.16). Como $\mathbf{y}_p(t_0) = \mathbf{0}$ basta encontrar la \mathbf{c} tal que $\Phi(t_0)\mathbf{c} = \boldsymbol{\eta}$. De aquí que $\mathbf{c} = \Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el resultado deseado. \square

Ejemplo 9.12. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{-t}, \quad x_1(0) = -1, \\ x_2'(t) &= x_2(t), \quad x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que las columnas de la matriz:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

son soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema dado. Esto combinado con el Teorema 9.5 o el 9.6, implica que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado para $t \in \mathbb{R}$. Es fácil ahora ver que

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Note que como $\Phi^{-1}(0) = I$, $\boldsymbol{\eta} = (-1, 1)^t$, y $\mathbf{f}(t) = (e^{-t}, 0)^t$, entonces la solución del PVI está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\boldsymbol{\eta} + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi) d\xi, \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\xi} & -\xi e^{-\xi} \\ 0 & e^{-\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\xi} \\ 0 \end{pmatrix} d\xi, \\ &= \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\xi} \\ 0 \end{pmatrix} d\xi, \\ &= \begin{pmatrix} te^t - \cosh t \\ e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

9.4 Sistemas con coeficientes constantes

El Teorema 9.11 reduce el problema de resolver el problema de valor inicial para la ecuación no-homogénea, al problema de buscar o calcular matrices fundamentales del sistema homogéneo (9.6). Esto lo vamos a hacer en el caso en que la matriz de coeficientes en (9.2) y (9.6) es contante, i.e., $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Escribimos ahora el sistema no-homogéneo como

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in (a, b), \quad (9.17)$$

y la ecuación homogénea como

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t \in (a, b). \quad (9.18)$$

Siguiendo la misma línea de pensamiento al resolver ecuaciones de orden dos con coeficientes constantes, buscamos soluciones de (9.18) de la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (9.19)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Es fácil ver que (9.19) es solución de (9.18) si y solo si

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

esto es λ es valor propio de A y \mathbf{v} es el vector propio correspondiente. El sistema de arriba tiene solución no trivial \mathbf{v} si y solo si

$$p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = 0, \quad (9.20)$$

lo que se conoce como la *ecuación característica* de A . Esta ecuación tiene raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ contando multiplicidades. Además como A es de entradas reales, $p(\cdot)$ tiene coeficientes reales y por consiguiente sus raíces complejas están dadas en pares conjugados.

9.4.1 Valores propios reales y distintas

Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son reales, distintos y de multiplicidad uno, entonces los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes y

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \dots, e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k, \quad (9.21)$$

son soluciones linealmente independientes de (9.18). Si $k = n$, entonces (9.21) es un conjunto fundamental para (9.18).

Ejemplo 9.13. Queremos hallar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) + 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes está dada por

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda + 2)(\lambda - 5).$$

De modo que $\lambda = -2, 5$ son los valores propios y es fácil ver que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son vectores propios correspondientes. Tenemos pues que

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son soluciones linealmente independientes del sistema original. De modo que la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{5t} \\ -3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} \end{pmatrix},$$

con matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

□

Ejemplo 9.14. Consideremos ahora el caso del Ejemplo 9.1 donde se tiene tres tanques inter-conectados. Tomamos el caso en que los volúmenes respectivos de los tanques son $V_1 = 20$, $V_2 = 40$, $V_3 = 50$ galones y la tasa a que fluyen las mezclas es $r = 10$ (gal/min). Entonces el sistema (9.3) es de la forma (9.18) donde

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.25$, $\lambda_3 = -0.2$ con vectores propios correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{-0.5t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-0.25t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{-0.2t} \mathbf{v}_3, \\ &= \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-0.5t} \\ -6c_1 e^{-0.5t} + c_2 e^{-0.25t} \\ 5c_1 e^{-0.5t} - 5c_2 e^{-0.2t} + c_3 e^{-0.2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Suponga que tenemos las condiciones iniciales de que

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Entonces c_1, c_2, c_3 se obtienen como la solución del sistema

$$\begin{aligned} 3c_1 &= 15, \\ -6c_1 + c_2 &= 0, \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema está dada por $c_1 = 5$, $c_2 = 30$, y $c_3 = 125$ de modo que la solución al problema de valor inicial (con las condiciones iniciales de arriba) es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 15e^{-0.5t}, \\ x_2(t) &= -30e^{-0.5t} + 30e^{-0.25t}, \\ x_3(t) &= 25e^{-0.5t} - 150e^{-0.25t} + 125e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

□

9.4.2 Valores propios complejos y distintos

Como la matriz A en (9.18) es de entradas reales, los valores propios complejos ocurren en pares conjugados. Esto es, si $\lambda = p + qi$ es valor propio de A , entonces $\bar{\lambda} = p - qi$ es también valor propio de A . Si $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ es vector propio de A correspondiente a λ , entonces

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Tomando el conjugado de esta ecuación y tomando en consideración las propiedades de este operador, y nuevamente que A es de entradas reales, tenemos que

$$(A - \bar{\lambda}I)\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0},$$

es decir, $\bar{\mathbf{v}}$ es vector propio de A correspondiente al valor propio $\bar{\lambda}$. Si escribimos $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Tenemos ahora que

$$\mathbf{w}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \mathbf{w}_2(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}},$$

son soluciones linealmente independientes de (9.18). Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(t) &= e^{pt}e^{qti}(\mathbf{a} + \mathbf{b}i), \\ &= e^{pt}(\cos(qt) + i\sin(qt))(\mathbf{a} + \mathbf{b}i), \\ &= e^{pt}[(\cos(qt)\mathbf{a} - \sin(qt)\mathbf{b}) + (\sin(qt)\mathbf{a} + \cos(qt)\mathbf{b})i]. \end{aligned}$$

De igual forma se obtiene que

$$\mathbf{w}_2(t) = e^{pt}[(\cos(qt)\mathbf{a} - \sin(qt)\mathbf{b}) - (\sin(qt)\mathbf{a} + \cos(qt)\mathbf{b})i].$$

Por el principio de superposición,

$$\mathbf{x}_1(t) = \frac{\mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t)}{2} = \operatorname{Re} \mathbf{w}_1(t) = e^{pt}(\cos(qt)\mathbf{a} - \sin(qt)\mathbf{b}), \quad (9.22a)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \frac{\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)}{2i} = \operatorname{Im} \mathbf{w}_1(t) = e^{pt}(\sin(qt)\mathbf{a} + \cos(qt)\mathbf{b}), \quad (9.22b)$$

son soluciones (reales) linealmente independientes de (9.18).

Ejemplo 9.15. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) - 3x_2(t), \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 4x_2(t). \end{aligned}$$

La ecuación característica para la matriz de coeficientes del sistema es dada por:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)^2 + 9 = 0,$$

que tiene soluciones $\lambda = 4 + 3i$, $\bar{\lambda} = 4 - 3i$. Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Usando ahora las formulas (9.22) con $p = 4$, $q = 3$, $\mathbf{a} = [1, 0]^t$, y $\mathbf{b} = [0, -1]^t$, tenemos que

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sen 3t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \sen 3t \\ -\cos 3t \end{bmatrix},$$

son soluciones linealmente independientes del sistema original. \square

Ejemplo 9.16. Consideremos ahora el caso de tres tanques interconectados como se muestra en la Figura 9.1. El modelo básico descrito en el Ejemplo 9.1 puede utilizarse también en esta situación. En particular tenemos que si $x_i(t)$ representa la concentración de sal en el tanque i , donde $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -k_1 x_1(t) + k_3 x_3(t), \\ x_2'(t) &= k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t), \\ x_3'(t) &= k_2 x_2(t) - k_3 x_3(t), \end{aligned}$$

ya que el tanque uno tiene un influjo del tanque tres dado por $k_3 x_3(t)$. Tomando

$$V_1 = 50 \text{ gal}, \quad V_2 = 25 \text{ gal}, \quad V_3 = 50 \text{ gal}, \quad r = 10 \text{ gal/min},$$

tenemos que el sistema de arriba es de la forma (9.18) donde

$$A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.4 - 0.2i$, $\lambda_3 = -0.4 + 0.2i$. Los vectores propios correspondientes son:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \bar{\mathbf{v}}_2.$$

Tenemos ahora que $\mathbf{x}_1(t) = (2, 1, 2)^t$, y usando las formulas (9.22) (con $p = -0.4$, $q = -0.2$), que

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-0.4t} \begin{pmatrix} \cos 0.2t \\ \sen 0.2t \\ -\sen 0.2t - \cos 0.2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{-0.4t} \begin{pmatrix} -\sen 0.2t \\ \cos 0.2t \\ \sen 0.2t - \cos 0.2t \end{pmatrix},$$

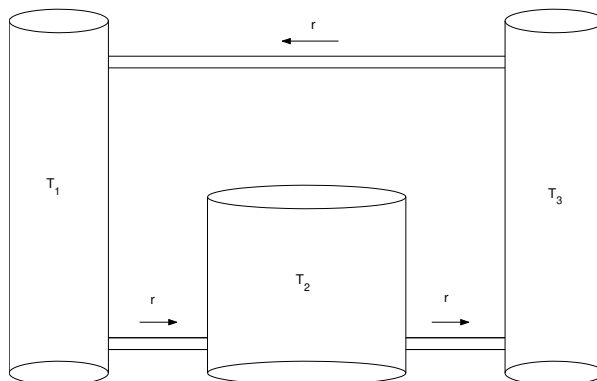


Figura 9.1: Tres tanques interconectados entre si donde se mantiene una mezcla de agua y sal.

son soluciones linealmente independientes del sistema. La solución general de sistema está dada ahora por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t), \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1 + e^{-0.4t} (c_2 \cos 0.2t - c_3 \sen 0.2t) \\ c_1 + e^{-0.4t} (c_2 \sen 0.2t + c_3 \cos 0.2t) \\ 2c_1 + e^{-0.4t} ((-c_2 + c_3) \sen 0.2t - (c_2 + c_3) \cos 0.2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que independiente de las concentraciones iniciales, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 2c_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = c_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = 2c_1.$$

Además

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 5c_1, \quad \forall t,$$

es decir, la cantidad total de sal en los tanques se mantiene constante. \square

9.4.3 Valores propios repetidos

Consideramos ahora el caso en que pueden haber valores propios que se repitan. Recuerde que los valores propios de la matriz A son las raíces del polinomio característico (9.20). La *multiplicidad (algebraica)* del valor propio λ es la multiplicidad

de λ como raíz de $p(\cdot)$. En el caso en que λ es valor propio de A , entonces la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

tiene soluciones no triviales \mathbf{v} . El conjunto

$$N(A - \lambda I) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad (9.23)$$

se llama el *espacio propio asociado al valor propio* λ . Es fácil ver que $N(A - \lambda I)$ es un subespacio de \mathbb{C}^n . La dimensión de $N(A - \lambda I)$ se conoce como la *multiplicidad geométrica* de λ y se puede demostrar que

$$\dim(N(A - \lambda I)) \leq \text{multiplicidad (algebraica) de } \lambda.$$

Sean k, p las multiplicidades algebraica y geométrica respectivamente del valor propio λ . El resultado anterior lo que dice es que $p \leq k$ además de que siempre $p \geq 1$. Si $p = k$ decimos que el valor propio λ es *no-defectuoso* o *completo*. De lo contrario, esto es si $p < k$, el valor propio se llama *defectuoso* y la diferencia $d = k - p$ se llama el *defecto* del valor propio λ . Si todos los valores propios de la matriz A son no-defectuosos, decimos que A es *no-defectuosa*². En este caso A tiene n vectores propios linealmente independientes y los métodos de las dos secciones anteriores se pueden utilizar para construir conjuntos fundamentales.

Ejemplo 9.17. Considere el sistema lineal:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Los valores propios de la matriz de coeficientes son $\lambda_1 = 5$ (simple) y $\lambda_2 = 3$ (doble). Para $\lambda_1 = 5$ tenemos el vector propio $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)^t$, y $\lambda_2 = 3$ tiene los vectores propios linealmente independientes

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que la matriz de coeficientes del sistema es no-defectuosa. Tenemos ahora que $\{e^{5t}\mathbf{v}_1, e^{3t}\mathbf{v}_2, e^{3t}\mathbf{v}_3\}$ es un conjunto fundamental del sistema y la solución general está dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + 2c_3 e^{3t} \\ -c_1 e^{5t} - 3c_3 e^{3t} \\ c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

²Las matrices simétricas y las que tienen todos sus valores propios distintos (simples), son no-defectuosas.

□

Ejemplo 9.18. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

tiene $\lambda = 4$ como el único valor propio que es de multiplicidad dos. Para hallar los vectores propios correspondientes, tenemos que resolver el sistema

$$(A - 4I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos pues que $a + b = 0$, i.e.,

$$N(A - 4I) = \text{span}\{\mathbf{v}_1\},$$

donde $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^t$. De modo que $p = 1 < 2 = k$, i.e., $\lambda = 4$ es defectuoso y por consiguiente la matriz A es defectuosa. □

Cuando la matriz A tiene algún valor propio defectuoso, los métodos de las secciones anteriores para construir conjuntos fundamentales fallan ya que se obtienen menos de n soluciones linealmente independientes. De alguna forma debemos de compensar por las soluciones que faltan. Consideremos primero el caso en que $k = 2$ y $p = 1$, i.e., λ es valor propio de A de multiplicidad algebraica dos y con un solo vector propio linealmente independiente \mathbf{v} . Sabemos que $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es solución del sistema. ¡Necesitamos otra solución! Es fácil ver que $te^{\lambda t}\mathbf{v}$ no funciona como otra solución. De modo que intentamos una segunda solución de la forma

$$\mathbf{x}_2(t) = te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{w},$$

para algún vector $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$. Ahora

$$\mathbf{x}'_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} + \lambda te^{\lambda t}\mathbf{v} + \lambda e^{\lambda t}\mathbf{w}.$$

Para que $\mathbf{x}'_2(t) = A\mathbf{x}_2(t)$, es necesario que

$$e^{\lambda t}\mathbf{v} + \lambda te^{\lambda t}\mathbf{v} + \lambda e^{\lambda t}\mathbf{w} = A(te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{w}).$$

Como $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, esto reduce a

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

\mathbf{w} se llama un *vector propio generalizado* de A asociado al valor propio λ . El par $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ satisface las ecuaciones

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}, \quad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Estas condiciones son equivalentes a

$$(A - \lambda I)^2\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (A - \lambda I)\mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Ejemplo 9.19. Considere el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ donde A es la matriz del Ejemplo 9.18. Tenemos el valor propio $\lambda = 4$ de multiplicidad dos con $\mathbf{v} = (1, -1)^t$ como generador del espacio propio asociado a λ . Necesitamos resolver el sistema $(A - 4I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Si $\mathbf{w} = (a, b)^t$, esto reduce a $3a + 3b = -1$. Un posible \mathbf{w} sería $(-1/3, 0)^t$. Así que

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{4t}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = te^{4t}\mathbf{v} + e^{4t}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} (t - 1/3)e^{4t} \\ -te^{4t} \end{pmatrix},$$

son soluciones del sistema. Como

$$\det \begin{pmatrix} e^{4t} & (t - 1/3)e^{4t} \\ -e^{4t} & -te^{4t} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}e^{8t} \neq 0, \quad \forall t,$$

las soluciones son linealmente independientes y por consiguiente la solución general del sistema es:

$$x_1(t) = (c_1 + c_2(t - 1/3))e^{4t}, \quad x_2(t) = -(c_1 + c_2t)e^{4t}.$$

□

Vamos ahora a generalizar el procedimiento descrito antes en el caso especial de $k = 2$ y $p = 1$. Para esto generalizamos el concepto de vector propio generalizado. Decimos que \mathbf{v} es *vector propio generalizado de A de rango r y asociado a λ* si

$$(A - \lambda I)^r \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (A - \lambda I)^{r-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \quad (9.24)$$

Note que un vector propio generalizado de rango $r = 1$ es un vector propio. El vector propio generalizado del ejemplo anterior es uno de rango $r = 2$. Tenemos también que:

Proposición 9.20. *Sea \mathbf{v} un vector propio generalizado de rango r asociado a λ para la matriz A . Entonces:*

- i) λ es valor propio de A ;*
- ii) los vectores $\{\mathbf{v}, (A - \lambda I)\mathbf{v}, (A - \lambda I)^2\mathbf{v}, \dots, (A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v}\}$ son linealmente independientes.*
- iii) $(A - \lambda I)^k\mathbf{v}$ es vector propio generalizado de rango $r - k$ para $0 \leq k \leq r - 1$.*

Demostración: Para la primera parte basta observar que por la definición de vector propio generalizado tenemos que $\mathbf{u} = (A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y que

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = (A - \lambda I)^r \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

i.e., \mathbf{u} es vector propio de A con valor propio λ .

Para la segunda parte, si los vectores

$$\{\mathbf{v}, (A - \lambda I)\mathbf{v}, (A - \lambda I)^2\mathbf{v}, \dots, (A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v}\},$$

son dependientes, entonces para algún j con $0 \leq j \leq r - 1$, tenemos que

$$(A - \lambda I)^j\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{j-1} c_k(A - \lambda I)^k\mathbf{v} + \sum_{k=j+1}^{r-1} c_k(A - \lambda I)^k\mathbf{v}$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(A - \lambda I)^{r-j}$, obtenemos que

$$\mathbf{0} = \sum_{k=0}^{j-1} c_k(A - \lambda I)^{r-j+k}\mathbf{v}.$$

Si $j > 0$, multiplicamos esta expresión, en turnos, por $(A - \lambda I)^{j-1}, \dots, (A - \lambda I)^1$, uno a uno en forma sucesiva, obtenemos que $c_0 = c_1 = \dots = c_{j-1} = 0$. Quedamos entonces con

$$(A - \lambda I)^j\mathbf{v} = \sum_{k=j+1}^{r-1} c_k(A - \lambda I)^k\mathbf{v}.$$

(Esta expresión es válida igualmente en el caso $j = 0$.) Ahora si multiplicamos esta ecuación por $(A - \lambda I)^{r-j-1}$ obtenemos que

$$(A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v} = \sum_{k=j+1}^{r-1} c_k(A - \lambda I)^{r-j-1+k}\mathbf{v}.$$

Pero $r - j - 1 + k \geq r$ para $j + 1 \leq k \leq r - 1$ y como $(A - \lambda I)^p\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $p \geq r$, tenemos que la ecuación de arriba implica que $(A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Por ultimo note que

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{r-k}(A - \lambda I)^k\mathbf{v} &= (A - \lambda I)^r\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ (A - \lambda I)^{r-k-1}(A - \lambda I)^k\mathbf{v} &= (A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

es decir, $(A - \lambda I)^k\mathbf{v}$ es vector propio generalizado de rango $r - k$. □

Los vectores $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ del Ejemplo 9.19 son un caso especial de una cadena de vectores propios generalizados de largo dos. En general decimos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

forman una *cadena de vectores propios generalizados de largo k asociada al valor propio λ* si

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \quad (9.25a)$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq k. \quad (9.25b)$$

Los vectores

$$\{(A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{v}, (A - \lambda I)^{r-2}\mathbf{v}, \dots, (A - \lambda I)\mathbf{v}, \mathbf{v}\},$$

en la parte (ii) de la Proposición 9.20, forman una cadena de largo r de vectores propios generalizados. Tenemos ahora que:

Teorema 9.21. *Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ una cadena de vectores propios generalizados de la matriz A asociados al valor propio λ . Entonces*

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} \mathbf{v}_m, \quad 1 \leq j \leq k, \quad (9.26)$$

son *soluciones linealmente independientes del sistema (9.18) para $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Primero verificamos que (9.26) es solución de (9.18) para cada $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_j(t) &= e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} A\mathbf{v}_m, \\ &= e^{\lambda t} \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} (\lambda\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_{m-1}) + \lambda \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \\ &= \lambda e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} \mathbf{v}_m + e^{\lambda t} \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} \mathbf{v}_{m-1}, \\ &= \lambda e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} \mathbf{v}_m + e^{\lambda t} \sum_{m=1}^{j-1} \frac{t^{j-m-1}}{(j-m-1)!} \mathbf{v}_m, \\ &= \mathbf{x}'_j(t). \end{aligned}$$

Suponga que c_1, c_2, \dots, c_k son constantes tales que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_k\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces tomando $t = 0$, usando que $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{v}_j$ para $1 \leq j \leq k$ y que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ son linealmente independientes (Proposición 9.20, Parte (ii)), tenemos que $c_1 =$

$c_2 = \dots = c_k = 0$, es decir $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ son linealmente independientes en \mathbb{R} . \square

En el caso especial en que $k = 3$, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una cadena de largo tres asociada al valor propio λ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\lambda t} (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),\end{aligned}\tag{9.27}$$

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{1}{2} t^2 \mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \right),\tag{9.28}$$

son soluciones linealmente independientes de (9.18).

Ejemplo 9.22. Consideramos ahora el sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Es fácil ver que A tiene el valor propio $\lambda = -1$ de multiplicidad tres y que el espacio propio asociado a $\lambda = -1$ está generado por el vector $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)^t$. Buscamos ahora una solución del sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Si escribimos $\mathbf{v}_2 = (a, b, c)^t$, el sistema tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de este sistema satisfacen

$$a + c = -1, \quad b + c = 2.$$

Una solución particular es $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0)^t$. Para el vector \mathbf{v}_3 resolvemos el sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ que escribiendo nuevamente $\mathbf{v}_3 = (a, b, c)^t$, tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de este otro sistema satisfacen que

$$a + c = 0, \quad b + c = -1.$$

Una solución particular sería $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 0)^t$. Usando las formulas (9.27) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} (t-1)e^{-t} \\ (t-2)e^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-t} \\ (\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1)e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema. \square

En el ejemplo anterior el defecto d del valor propio es máximo, esto es $d = k - 1 = 2$, o lo mismo decir, la dimensión del espacio propio asociado al valor propio es uno. Si $d < k - 1$, entonces el método descrito en el ejemplo anterior para construir los vectores propios generalizados puede fallar en ocasiones.

Ejemplo 9.23. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $\lambda = 1$ es valor propio de A de multiplicidad algebraica tres, y que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son vectores propios asociados que generan el espacio propio asociado. De modo que el defecto del valor propio es $d = 1$. Se puede ver ahora que ambos sistemas

$$(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \quad (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_2,$$

son inconsistentes. \square

De (9.25) se obtiene que

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}.$$

También, si el defecto del valor propio λ es d , entonces el largo de cualquier cadena de vectores propios generalizados asociada a λ es a lo más $d + 1$ (Esto es consecuencia de que la suma de los largos de todas las cadenas asociados al valor propio λ tiene que sumar a su multiplicidad algebraica, y el número de cadenas asociadas

a λ es igual a su multiplicidad geométrica.). Combinando estos dos resultados obtenemos que

$$(A - \lambda I)^{d+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (9.29)$$

tiene soluciones no triviales. Usando esto tenemos el siguiente método para construir cadenas de vectores propios generalizados: sea $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ una solución de (9.29) y genere $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_k\}$ tal que

$$(A - \lambda I)\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1} \neq \mathbf{0}, \quad 1 \leq j \leq k-1, \quad (9.30a)$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \quad (9.30b)$$

Entonces

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_{k-1}, \dots, \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_1,$$

es una cadena de largo k de vectores propios generalizados asociada a λ .

Ejemplo 9.24. Para la matriz A del Ejemplo 9.23 tenemos que $d = 1$ y que $(A - I)^2 = O$ (la matriz cero) por lo que \mathbf{u}_1 puede ser cualquier vector distinto del cero. Como

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

tenemos tomando $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)^t$, que $\mathbf{u}_2 = (A - I)\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)^t$. Note que $(A - I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Así que una cadena de largo dos del valor propio $\lambda = 1$ es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como \mathbf{v}_1 es vector propio, tomamos ahora un vector propio de los dos calculados en el Ejemplo 9.23 que sea linealmente independiente a \mathbf{v}_1 . Cualquiera de los dos vectores propios calculados funciona por lo que tomamos $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)^t$. Tenemos ahora que el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ tiene las soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^t(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ 2te^t \\ -te^t \end{pmatrix},$$

correspondientes a la cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y $\mathbf{x}_3(t) = (e^t, e^t, 0)^t$ correspondiente al vector propio \mathbf{v}_3 . La solución general del sistema está dada ahora por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (c_1 + c_2(t+1) + c_3)e^t, \\ x_2(t) &= (2c_1 + 2tc_2 + c_3)e^t, \\ x_3(t) &= (-c_1 - c_2t)e^t. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 9.25. Suponga que una matriz A de tamaño 6×6 tiene valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -5$ de multiplicidades algebraicas 2 y 4 respectivamente con defectos 1 y 2 respectivamente. Sean $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vectores propios linealmente independientes correspondientes a λ_1 y λ_2 . Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\}$ es una cadena de vectores propios generalizados correspondiente a λ_1 y que $\{\mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ son cadenas de vectores propios generalizados de λ_2 . (Note que otra posibilidad para λ_2 es tener dos cadenas de largo dos cada una.) Podemos construir seis soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{2t}\mathbf{v}_1, & \mathbf{x}_2(t) &= e^{2t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1), \\ \mathbf{x}_3(t) &= e^{-5t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{x}_4(t) &= e^{-5t}\mathbf{v}_3, \\ \mathbf{x}_5(t) &= e^{-5t}(t\mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_2), & \mathbf{x}_6(t) &= e^{-5t}\left(\frac{1}{2}t^2\mathbf{v}_3 + t\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3\right). \end{aligned}$$

□

9.5 Las ecuaciones de Frenet

En esta sección vamos a discutir una aplicación de algunos de los conceptos de este capítulo, en particular el Teorema 9.2 (de existencia y unicidad), al problema de geometría diferencial de construir una curva y su *base de Frenet* partiendo de unas funciones de *curvatura* y *torsión* pre-especificadas. De primera mirada pudiera dar la impresión que este resultado es una consecuencia directa del teorema de existencia y unicidad. Aunque este teorema garantiza que el sistema de Frenet (vea (9.34)) siempre tiene solución dadas las funciones de curvatura y torsión, no es inmediato de este teorema que el triple de vectores resultante satisface las condiciones de ortonormalidad requeridas. No obstante si las condiciones iniciales en el sistema de Frenet cumplen las condiciones de ortonormalidad, entonces utilizando un sistema *auxiliar* veremos que el triple resultante del teorema de existencia y unicidad cumple con las condiciones de ortonormalidad en su intervalo máximo de existencia.

Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva C^1 . Suponemos que el parámetro s es el de largo de arco de la curva, lo que es equivalente a que $\sigma'(s) \cdot \sigma'(s) = 1$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{T}(s) = \sigma'(s), \tag{9.31}$$

es el *vector tangente unitario* a la curva σ en s . Diferenciando $\sigma'(s) \cdot \sigma'(s) = 1$ con respecto a s obtenemos que

$$\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0,$$

i.e., $\mathbf{T}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{T}(t)$. Definimos la *normal principal* a la curva en el punto s por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad (9.32)$$

y el *vector binormal* a la curva en el punto s por

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s). \quad (9.33)$$

Los vectores $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ forman un sistema ortonormal que se *mueve* a lo largo de la curva σ y que se conoce como el *sistema o base de Frenet* para la curva σ .

Se puede verificar que el triple $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ es solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (9×9):

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{N}(s). \end{cases} \quad (9.34)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se conoce como las *ecuaciones de Frenet*. Aquí $\kappa(s)$ es la *curvatura* de σ en el punto s y se define por

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad (9.35)$$

mientras que $\tau(s)$ se llama la *torsión* de la curva σ en el punto s y está dada por

$$\tau(s) = \frac{\mathbf{T}''(s) \cdot \mathbf{B}(s)}{\kappa(s)} = \frac{\sigma'''(s) \cdot (\sigma'(s) \times \sigma''(s))}{\|\sigma''(s)\|^2}. \quad (9.36)$$

Note que κ mide la norma de la razón a que cambia el vector tangente unitario a la curva con respecto al largo de arco, y τ mide la tendencia de la curva a ser no plana.

Es claro que partiendo de la parametrización de una curva σ en términos del largo de arco, podemos calcular la base de Frenet y la curvatura y torsión de dicha curva. Ahora vamos a ver que para cualesquiera funciones continuas de curvatura y torsión que especifiquemos, las ecuaciones (9.34) se pueden resolver en forma única (modulo las condiciones iniciales) obteniendo así la base de Frenet y por consiguiente la parametrización σ .

Teorema 9.26. Sean κ y τ funciones continuas en $J = [0, s_0)$ con $\kappa(s) > 0$ para $s \in J$. Sea $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$ un conjunto ortonormal de vectores en \mathbb{R}^3 con

$\mathbf{B}_0 = \mathbf{T}_0 \times \mathbf{N}_0$. Entonces el sistema (9.34) tiene una solución $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ definida sobre J , tal que $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es un conjunto ortonormal con $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$, para toda $s \in J$, y tal que

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{N}(0) = \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0.$$

En adición, si $\kappa, \tau \in C^1$ y $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces existe $\boldsymbol{\sigma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva C^3 tal que $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0$, con el triple $\{\mathbf{T}(\cdot), \mathbf{N}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot)\}$ su base de Frenet, y con κ, τ sus funciones de curvatura y torsión respectivamente.

Demostración: Como el sistema (9.34) es lineal, el Teorema 9.2 garantiza que este sistema tiene solución que es única y definida en todo J , y que satisface las condiciones iniciales. Ahora definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s), & u_2(s) &= \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}(s), & u_3(s) &= \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{B}(s), \\ u_4(s) &= \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{N}(s) - \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s), & u_5(s) &= \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) - \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

Usando (9.34) es fácil ver ahora que:

$$\begin{aligned} u_1'(s) &= \kappa(s)u_4(s) + \tau(s)u_2(s), \\ u_2'(s) &= \kappa(s)u_3(s) - \tau(s)u_1(s), \\ u_3'(s) &= -\kappa(s)u_2(s) + \tau(s)u_5(s), \\ u_4'(s) &= 2[-2\kappa(s)u_1(s) + \tau(s)u_3(s)], \\ u_5'(s) &= 2[\kappa(s)u_1(s) - 2\tau(s)u_3(s)]. \end{aligned}$$

La condición inicial en $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ implica que las u 's satisfacen la condición inicial:

$$(u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0), u_5(0)) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Por el Teorema 9.2, $u_i(s) = 0$ para toda $s \in J$, $1 \leq i \leq 5$. Esto implica que $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ es ortogonal para toda s y que

$$\|\mathbf{T}(s)\| = \|\mathbf{N}(s)\| = \|\mathbf{B}(s)\|, \quad s \in J.$$

Si multiplicamos interiormente la primera ecuación en (9.34) por \mathbf{T} y usamos la ortogonalidad ya establecida, obtenemos que $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = 0$, es decir $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) =$ constante. Pero como

$$\mathbf{T}(0) \cdot \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{T}_0 = 1,$$

tenemos por la igualdad de las normas establecida anteriormente, que

$$\|\mathbf{T}(s)\| = \|\mathbf{N}(s)\| = \|\mathbf{B}(s)\| = 1, \quad s \in J.$$

Podemos concluir que $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ es ortonormal para toda s . De aquí que $\mathbf{B}(s) = \pm \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$. Pero como $\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0 = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0)$, entonces $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$ para toda s .

Para la última parte del teorema, si $\kappa, \tau \in C^1$ entonces $\{\mathbf{T}(\cdot), \mathbf{N}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot)\}$ es C^2 . Ahora definimos $\boldsymbol{\sigma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\boldsymbol{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}_0 + \int_0^s \mathbf{T}(t) dt.$$

Es claro que $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0$ y que $\{\mathbf{T}(\cdot), \mathbf{N}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot)\}$ es su base de Frenet. De la primera ecuación en (9.34) sigue que $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$. Como $\kappa'(s) = \mathbf{T}''(s) \cdot \mathbf{N}(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}'(s) + \kappa'(s)\mathbf{N}(s) \\ &= \kappa(s)(-\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)) + (\mathbf{T}''(s) \cdot \mathbf{N}(s))\mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

De aquí que $\mathbf{T}''(s) \cdot \mathbf{B}(s) = \kappa(s)\tau(s)$, es decir que $\tau(s) = (\mathbf{T}''(s) \cdot \mathbf{B}(s))/\kappa(s)$. \square

9.6 Ejercicios

Ejercicio 9.1. Para un sistema de la forma $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, verifique con la matriz A dada, que las funciones dadas son soluciones del sistema. Utilice el wronskiano para verificar que las soluciones son linealmente independientes y luego escriba la solución general del sistema.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.2. Halle una solución para cada uno de los sistemas del Ejercicio 9.1 sujeto a las condiciones iniciales:

a) $\mathbf{x}(0) = [5, -3]^t$.

b) $\mathbf{x}(0) = [10, 12, -1]^t$.

Ejercicio 9.3. Halle la solución general del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ donde:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9.4. Si agua fresca entra a un arreglo de tres tanques según descrito por el sistema (9.3), halle la solución general del sistema en el caso en que $r = 10$ gal/min, $V_1 = 50$ gal, $V_2 = 25$ gal, y $V_3 = 20$ gal.

Ejercicio 9.5. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de (9.6).

- a) Verifique que $\Phi(t)$ satisface la ecuación $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.
- b) Verifique que si $\mathbf{v}(t)$ es una función diferenciable, entonces $\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t)$ es solución de (9.2) si y solo si $\Phi(t)\mathbf{v}'(t) = \mathbf{f}(t)$.

Ejercicio 9.6. Halle la solución general del sistema $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$ para las siguientes A y \mathbf{f} :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ -2 \cos t \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.7. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1'' - 3y_1' + 2y_1 + y_2' - y_2 &= 0, \\ y_1' - 2y_1 + y_2' + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

- a) Despejando la segunda ecuación para y_2' y sustituyendo en la primera, verifique que este sistema es equivalente al sistema $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$, donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Encuentre un sistema fundamental para el sistema de la parte (a) y con éste escriba la solución general del sistema.

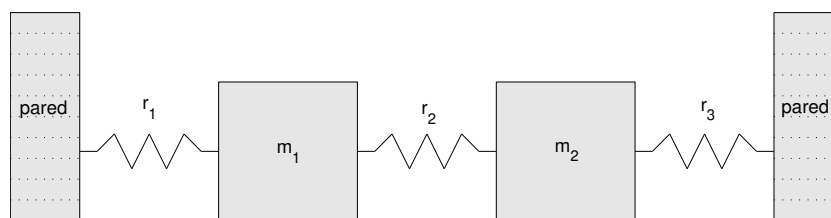


Figura 9.2: Sistema de dos masas m_1, m_2 y tres resortes $r_i, i = 1, 2, 3$ que ejercen fuerzas proporcionales a los desplazamientos.

- c) Calcule la solución del sistema original que cumple con las condiciones iniciales de que $y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 0$.

Ejercicio 9.8. Considere el problema de un sistema de dos masas m_1, m_2 sujetas a tres resortes según se muestra en la Figura (9.2). Suponemos que las fuerzas de los resortes están dadas por el modelo lineal (ley de Hooke):

$$f_i(x) = -k_i x, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $k_i > 0, i = 1, 2, 3$ y x representa el alargamiento del resorte en cuestión. Si $x_i(t)$ denota el desplazamiento de la masa $m_i, i=1,2$, entonces usando la segunda ley de Newton obtenemos que:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= k_2(x_2(t) - x_1(t)) - k_1 x_1(t) + g_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -k_2(x_2(t) - x_1(t)) - k_3 x_2(t) + g_2(t), \end{aligned}$$

donde g_1 y g_2 son fuerzas (netas) externas que actúan sobre las masas m_1 y m_2 respectivamente.

- Con una sustitución apropiada, convierta este sistema a un sistema lineal no-homogéneo 4×4 .
- Encuentre una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado, esto es, con $g_1 = g_2 = 0$.
- Escriba la expresión, en términos de g_1, g_2 y la matriz fundamental de la parte (b), que representa la solución general para el sistema de la parte (a).

Ejercicio 9.9. La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix},$$

tiene el valor propio $\lambda = -2$ doble con $N(B - \lambda I) = \text{span}\{(3, -1)^t\}$.

- a) Determine un vector propio generalizado para B .
- b) Halle la solución del problema de valor inicial: $\mathbf{y}'(t) = B\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(0) = (1, -1)^t$.

Ejercicio 9.10. Halle la solución general del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ donde:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.11. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{y}_0 = [1, 2, -4, 3]^t$ y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9.12. Suponga que una matriz C de tamaño 6×6 tiene valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 4$ de multiplicidades algebraicas 3 y 3 respectivamente con defectos 2 y 1 respectivamente³. Sean $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vectores propios linealmente independientes correspondientes a λ_1 y λ_2 . Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es una cadena de vectores propios generalizados correspondiente a λ_1 y que $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3\}$, $\{\mathbf{v}_3\}$ son cadenas de vectores propios generalizados de λ_2 . Determine seis soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}'(t) = C\mathbf{y}(t)$.

³Recuerde que el defecto de un valor propio es la diferencia entre la multiplicidad algebraica y la geométrica.

Ejercicio 9.13. Considere el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz A tiene polinomio característico

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 25)^2,$$

por lo que tiene autovalores $3 \pm 4i$ de multiplicidad dos cada uno.

a) Verifique que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = [1, i, 0, 0]^t, \quad \mathbf{v}_2 = [0, 0, 1, i]^t,$$

es una cadena de largo dos asociada al autovalor $3 - 4i$.

b) Verifique ahora que al tomar las partes reales e imaginarias de las soluciones del sistema dadas por

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \quad e^{\lambda t} (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

donde $\lambda = 3 - 4i$, obtiene cuatro soluciones reales y linealmente independientes del sistema de ecuaciones diferenciales.

Apéndice A

El conjunto de los números complejos

En esta sección vamos a repasar algunas definiciones y propiedades algebraicas del conjunto de los números complejos. Recuerde que éste conjunto se denota usualmente con el símbolo \mathbb{C} y se define por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}.$$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces a se llama la *parte real* de z mientras que b es su *parte imaginaria*. Para representar ésto usamos la notación:

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b.$$

Al número complejo $z = a + bi$ le podemos asociar el par ordenado (a, b) . De ésta forma todo número complejo se puede visualizar como un punto en el plano \mathbb{R}^2 y viceversa. Cuando visualizamos a \mathbb{C} ésta manera, le llamamos *eje real* al eje horizontal, y *eje imaginario* al eje vertical. (Vea la Figura A.1.)

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ son números complejos, entonces $z_1 = z_2$ si y solo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. La *suma y multiplicación* de z_1 y z_2 se definen por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned}$$

El *conjugado* del número complejo $z = a + bi$ se denota por \bar{z} y se define como el número complejo $\bar{z} = a - bi$. El modulo de z se denota por $|z|$ y se define por:

$$|z| = (z\bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

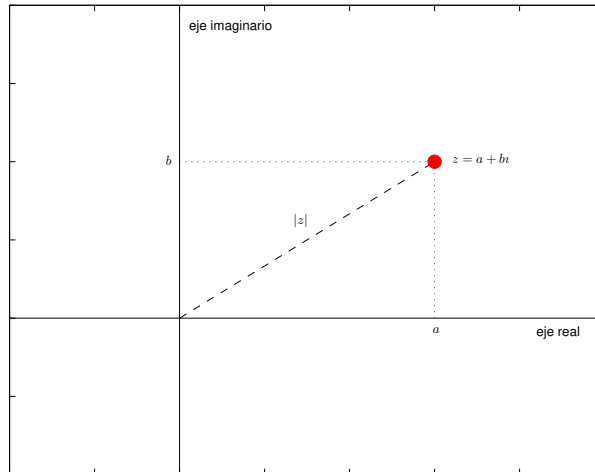


Figura A.1: Interpretación geométrica del número complejo $z = a + bi$ y su módulo.

Note que $|z|$ representa la distancia al origen del par ordenado (a, b) asociado al número complejo z . (Vea la Figura A.1.)

Un polinomio con coeficientes complejos de grado $n \geq 0$, es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n$. El siguiente teorema se conoce como el *Teorema Fundamental del Algebra*.

Teorema A.1. *Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. Entonces existen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tal que:*

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

El siguiente resultado asegura que si los coeficientes del polinomio son todos reales, entonces las raíces complejas del polinomio están dadas por pares de conjugados complejos.

Teorema A.2. *Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales. Si $z = a + bi$ es raíz de p , entonces $\bar{z} = a - bi$ es también raíz de p .*

Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos:

$$e^{zx} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx).$$

El caso particular de esta fórmula donde $z = i$, reduce a:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

la cual es conocida como la *identidad de Euler*. Para $z, w \in \mathbb{C}$ y n entero, tenemos que:

$$\frac{e^{zx}}{e^{wx}} = e^{(z-w)x}, \quad (e^{zx})^n = e^{nzx},$$

y que:

$$\frac{d}{dx} [e^{zx}] = ze^{zx}.$$

Si el número complejo z es distinto de cero, entonces lo podemos escribir como:

$$z = a + bi = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right).$$

Como

$$\left(\frac{a}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|z|} \right)^2 = 1,$$

tenemos que existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|}.$$

Por la identidad de Euler que mencionamos antes, tenemos que:

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| e^{i\theta}.$$

Esta representación del número complejo z se conoce como su *forma polar*. La forma polar del número complejo z es particularmente útil para el cómputo de raíces n -ésimas del número z , esto es, hallar todos los números w tal que:

$$w^n = z,$$

donde $n \geq 1$ es entero. El siguiente teorema contesta ésta pregunta y se conoce como el *Teorema de De Moivre*.

Teorema A.3. *Sea $z = |z| e^{i\theta}$ un número complejo distinto de cero, y $n \geq 1$ un entero. Entonces las n raíces de la ecuación $w^n = z$ están dadas por:*

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Referencias

- [1] Boyce, W. E. and Diprima, R. C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Fourth Edition, John Wiley & Sons, 1986.
- [2] Bowman, F., Introduction to Bessel Functions, Dover Publications, Inc., 1958.
- [3] Brauer, F. and Nohel, J. A., The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction, Dover Publications, Inc., 1989.
- [4] Braun, M., Differential Equations and Their Applications, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1978.
- [5] Coddington, E. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw–Hill Book Co., Inc., 1955.
- [6] Davis, H. T., Introduction to Nonlinear Differential Equations, Dover Publications, Inc., 1962.
- [7] Edwards, C. H. and Penney, D. E., Differential Equations: Computing and Modeling, Prentice –Hall, Inc., 1996.
- [8] Ince E. L., Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc., 1956.
- [9] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of Functions - With Formulas and Curves, Dover Publications, Inc., 1945.
- [10] Lebedev N., N., Special Functions and their Applications, Dover Publications, Inc., 1972.
- [11] Sanchez, D. A., Ordinary Differential Equations and Stability, Dover Publications, Inc., 1979.
- [12] Stakgold, I. and Holst, M., Green's Functions and Boundary Value Problems, Third Edition, John Wiley & Sons, 2011.

Indice

- $C^k(\alpha, \beta)$, 58
- \mathbb{C} , 275
- base de Frenet, 268
- caída libre
 - con fricción, 24
 - sin fricción, 24
- campo de direcciones, 17
- circuito eléctrico
 - LR, 46
 - RC, 46
 - RLC, 5
- coeficientes constantes, ecuación lineal, 63
- condición inicial, 10
- conjunto fundamental, 60
- convolución de dos funciones, 203
 - transformada, 204
- curva
 - base de Frenet, 268
 - curvatura, 268
 - ecuaciones de Frenet, 268
 - normal principal, 268
 - torsión, 268
 - vector tangente unitario, 267
 - vector vector binormal, 268
- curva integral, 16
- curvatura, 268
- delta de Dirac, 198
 - transformada, 199
- derivada de derecha, 224
- derivada de izquierda, 224
- discontinuidad simple de una función, 93,
223
- ecuación autónoma
 - diagrama de fase, 22
 - escalar orden uno, 20
 - punto crítico, 21
 - solución de equilibrio, 21
- ecuación de Bessel de orden p , 163, 173
- ecuación de calor, 229–232
 - problema de frontera y valor inicial, 229
 - separación de variables, 230
- ecuación de Laplace, 236–239
 - problema de frontera tipo Dirichlet, 237
 - separación de variables, 237
- ecuación de Legendre, 163
- ecuación de onda, 233–236
 - separación de variables, 234
- ecuación diferencial
 - escalar, 1
 - lineal, 2
 - no lineal, 2
 - orden, 2
 - ordinaria, 1
 - parcial, 2
 - sistema, 1
- ecuación equidimensional de Euler–Cauchy,
164
- ecuación escalar
 - lineal, 7
 - orden n , 7
 - solución, 7
- ecuación escalar orden dos
 - ecuación auxiliar, 63
 - existencia y unicidad, 55
 - forma general, 54
 - lineal homogénea, 57
 - lineal no-homogénea, 57, 66
 - lineal, existencia y unicidad, 57
 - lineal, homogénea, coeficientes constantes,

- 63
 - reducción de orden, 62
 - reducible orden uno, 55
- ecuación escalar orden uno
 - de Bernoulli, 41
 - exacta, 33
 - factor integrante, 37
 - homogénea, 39
 - lineal, 26
 - separable, 31
- ecuación lineal orden n , 87
 - coeficientes constantes, 87
 - ecuación característica, 88
- ecuaciones de Frenet, 268
- ecuación indicial, 166
- especies en competencia, 137–142
- familia de soluciones, 16
- familias de curvas ortogonales, 32
- función continua por pedazos, 185
- función de Bessel
 - ceros o raíces, 177
 - primer tipo, 174
 - propiedad ortogonalidad, 178
 - propiedades asintóticas, 176
 - propiedades diferenciales e integrales, 177
 - segundo tipo, 175
 - series, 178, 180
 - transformada de Laplace, 203
- función de MATLAB
 - ode23, 216
 - ode45, 216
- función escalonada unitaria, 190
 - transformada, 191
- función Gamma, 173
- funciones de tipo impulso
 - delta de Dirac, 198
 - el impulso, 197
 - unitarias, 197
- identidad de Euler, 277
- intervalo máximo de existencia, 7
- isoclina de nivel c , 18
- ley de enfriamiento de Newton, 5
- Lorenz, sistema, 221
- método de Euler, 212
 - error local, 212
- métodos Runge–Kutta
 - adaptativo, 216
 - clásico, 215
 - de dos evaluaciones, 215
 - método de Heun, 215
 - método del punto medio, 215
- matriz no-defectuosa, 259
- mezclas, problemas de, 2
- modelo exponencial, para poblaciones, 43
- modelo logístico, para poblaciones, 43
- modelo logístico con umbral, 44
- modelos presa–depredador, 135–137
- números complejos
 - conjugado, 275
 - definición, 275
 - eje real e imaginario, 275
 - forma polar, 277
 - modulo, 275
 - partes real e imaginaria, 275
 - suma y multiplicación, 275
 - teorema De Moivre, 277
 - teorema fundamental del álgebra, 276
- operador diferencial de orden dos, 58
- péndulo simple, 131
 - puntos críticos, 133
 - separatrices, 134
- péndulpsimple, 134
- población de saturación, 44
- polinomios de Legendre, 170
- presa–depredador, modelo, 106
- presa–depredador, modelo de, 221
- principio de superposición, 59
- problema de frontera
 - auto-funciones, 91
 - autovalores, 91
 - serie de Sturm–Liouville, 93
 - tipo Sturm–Liouville, 91
- problema de valor inicial, 10
- problemas de mezclas, 2
- punto crítico
 - asintoticamente estable, 21

- inestable, 21
- punto ordinario de ecuación diferencial, 155
- punto singular, 162
- punto singular irregular, 162
- punto singular regular, 162
- reducción de orden, 62
- serie de Frobenius, 168
- serie de potencias, 153
 - convergencia absoluta puntual, 153
 - convergencia puntual, 153
 - diferenciación por términos, 154
 - intervalo de convergencia absoluta, 154
 - radio de convergencia, 153
 - suma parcial, 153
- series de Fourier
 - de cosenos, 228
 - de senos, 228
 - definición, 223
 - ortogonalidad, 223
 - periodo $2L$, 226
- sistema autónomo 2×2 , 105
 - centro, 124
 - espiral, 124
 - lineal: estabilidad y tipo de diagrama, 126
 - linearización, 112
 - nodo impropio, 116, 121
 - nodo propio, 121
 - nolineal: estabilidad y tipo de diagrama, 130
 - orbita periódica, 108
 - plano fase, 106
 - punto crítico, 110
 - punto crítico asintóticamente estable, 111
 - punto crítico estable, 111
 - punto crítico inestable, 111
 - silla de caballo, 119
 - sistema lineal, 113
 - trayectoria, orbita, paso, 106
- sistema de masa–resorte, 3
- sistema masa–péndulo, 4
- sistema masa–resorte no lineal, 142–145
- sistemas de primer orden lineal
 - coeficientes constantes, 253–267
 - conjunto fundamental, 249
 - definición, 244
 - existencia y unicidad de soluciones, 246
 - independencia lineal, 246
 - matrices defectuosas, 258
 - matriz fundamental, 249
 - principio superposición, 246
 - problemas de mezclas, 245
 - sistema homogéneo, 246
 - solución general sistema no–homogéneo, 251
 - solución PVI sistema homogéneo, 251
 - solución PVI sistema no–homogéneo, 252
 - valores propios complejos distintos, 256
 - valores propios reales distintos, 254
 - valores propios repetidos, 258
 - variación de parámetros, 252
 - wronskiano, 247
- solución complementaria, 66
- solución en serie punto ordinario, 155
- solución general, 16
- soluciones particulares
 - coeficientes indeterminados, 67–74
 - variación de parámetros, 74
- teorema comparación para integrales, 186
- teorema de existencia y unicidad, 11
- teorema De Moivre, 277
- teorema existencia y unicidad ecuación lineal, 30
- teorema fundamental del álgebra, 276
- torsión, 268
- transformada de Laplace
 - convolución, 203
 - de derivadas, 188
 - de las funciones de Bessel, 203
 - definición, 184
 - existencia, 186
 - formula tipo integración por partes, 204
 - función escalonada unitaria, 190
 - inversa, 189
 - linealidad, 188
- valor propio
 - defectuoso, defecto, 259

- definición, 253
- espacio propio asociado, 259
- multiplicidad algebraica, 258
- multiplicidad geométrica, 259
- vector propio generalizado
 - cadena de largo k , 263
 - definición, 261
- vibraciones mecánicas, 76–86
 - forzadas, 82
 - frecuencia natural, 77
 - libres con fricción, 79
 - libres sin fricción, 77
 - moduladas, latidos, 84
 - movimiento armónico simple, 77
 - movimiento sub y sobre amortiguado,
79
 - periodo natural, 77
 - pseudo periodo, 80
 - resonancia, 85
- wronskiano, 59