Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
Humacao, Puerto Rico 00791

MATE 4061 | Análisis Numérico | Prof. Pablo Negrón

Laboratorio 6: El Teorema de Gerschgorin

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y entradas complejas, un número $\lambda \in \mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) es un *valor propio* de A si existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Usando propiedades de determinantes, es fácil ver que el problema de hallar los valores propios de una matriz es equivalente al de hallar las raíces de un polinomio con coeficientes complejos. Por el Teorema Fundamental del Algebra, tenemos ahora que toda matriz $n \times n$ tiene exactamente n valores propios contando multiplicidades. También tenemos, por un teorema famoso de Galöis, que el cálculo de los valores propios de una matriz no se puede hacer utilizando únicamente formulas algebraicas. Por tal razón el cálculo de los valores propios de matrices es un problema computacionalmente complejo y el poder estimar los mismos es de vitál importancia. El estimado más crudo de los valores propios de una matriz esta dado por la desigualdad $\rho(A) \leq \|A\|$, donde

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, \tag{1}$$

se conoce como el *radio espectral* de A. Este estimado aunque útil en muchas ocasiones, no es muy preciso en cuanto a la localización de los valores propios de A. El Teorema de Gerschgorin va más allá en este sentido. Para $A = (a_{ij})$ definimos los radios

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad , \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2}$$

y los discos

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}. \tag{3}$$

El Teorema de Gerschgorin establece que cada valor propio de A pertenece al menos a uno de los D_i y que si k de los discos de Gerschgorin se intersecan entre si y a la vez están aislados de los otros discos, entonces su unión contiene exactamente k de los valores propios de A.

Teorema 1. *Sea A una matriz $n \times n$ y defina los discos D_i por (2), (3). Entonces*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \tag{4}$$

para cualquier valor propio λ de A. Además si $\mathcal{S}$ es la unión de m discos los cuales son disjuntos de los restantes $n - m$, entonces $\mathcal{S}$ contiene exactamente m valores propios de A.

Como A y A^t tienen los mismos valores propios, el Teorema de Gerschgorin también es cierto para los *discos columnas*:

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ki}| \right\}. \tag{5}$$

Ejemplo 1. Considere la matriz

$$A = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Note que $\|A\| = (1/16)\max\{14, 9, 14\} = 7/8$, de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$. Podemos mejorar este estimado con el Teorema de Gerschgorin. Tenemos aplicando (2) que:

$r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos (3) son

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 1/2| \leq 3/8\}, \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 3/8| \leq 3/16\}, \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 5/8| \leq 1/4\}, \end{aligned}$$

los cuales se ilustran en Figura (1). Así que tenemos exactamente dos valores propios en $D_1 \cup D_3$ y exactamente uno en D_2. Este último valor propio tiene que ser real ya que como A tiene entradas reales, el polinomio característico de A tiene coeficientes reales, y por consiguiente las raíces complejas vienen en pares conjugados. Así que tenemos un valor propio $\lambda \in [3/16, 9/16]$. Como el cero no esta en ninguno de los discos podemos concluir que cero no es valor propio de A, en particular A es nosingular. Estos resultados se pueden refinar un poco más aplicando el teorema a la matriz transpuesta (cf. (5)).

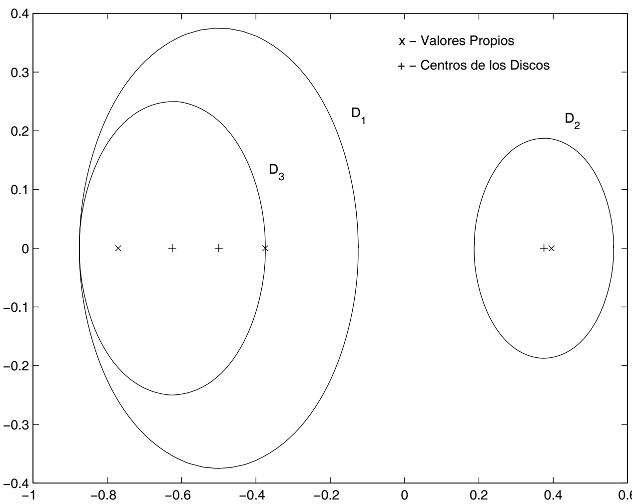

Figura 1: Discos de Gerschgorin para la matriz del Ejemplo (1).

Veamos ahora como se generan las figuras de los discos de Gerschgorin. Primero calculamos los radios de los discos y los guardamos en un vector r. Esto lo hacemos con las siguientes instrucciones en MATLAB:

```
n=length(A);
diagonal=abs(diag(A));
r=sum(abs(A),2)-diagonal;
```

Recuerde que un circulo de radio a y centro en (h, k) se puede especificar por las ecuaciones paramétricas:

$$x = a\cos(t) + h \quad , \quad y = a\,\mathrm{sen}(t) + k \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para los discos de Gerschgorin, el centro es $(h, k) = (\mathrm{Real}(a_{ii}), \mathrm{Imag}(a_{ii}))$ ya que estamos trazando estos en el plano complejo. Usando las formulas de arriba, podemos calcular los discos en MATLAB como sigue:

```
t=[0:0.1:6.3]';
X=zeros(length(t),n); Y=X;
for i=1:n
    X(:,i)=r(i)*cos(t)+real(A(i,i));
    Y(:,i)=r(i)*sin(t)+imag(A(i,i));
end
```

Podemos ahora trazar los valores propios y los discos de Gerschgorin mediante:

```
e=eig(A);
plot(X,Y,real(e),imag(e),'x')
```

Combinamos ahora todas estas instrucciones en una función que dada la matriz A, esta calcula y dibuja los discos de Gerschgorin:

```
function gersch(A)
n=length(A);
diagonal=abs(diag(A));
r=sum(abs(A),2)-diagonal;
t=[0:0.1:6.3]';
X=zeros(length(t),n); Y=X;
for i=1:n
    X(:,i)=r(i)*cos(t)+real(A(i,i));
    Y(:,i)=r(i)*sin(t)+imag(A(i,i));
end
e=eig(A);
plot(X,Y,real(e),imag(e),'x')
```

Puede probar esta función trazando los discos de Gerschgorin para una matriz 5×5 arbitraria de entradas complejas:

```
A=round(10*rand(5))+sqrt(-1)*round(10*rand(5));
gersch(A)
```

Ejemplo 2. Defina

```
B = [3,0.1,2;0.1,7,2;2,2,50];
```

Utilizando la función `gersch` tenemos que los discos Gerschgorin de B quedan como en la Figura (2). Como B es simétrica, sus valores propios son todos reales y por esto están en el eje real. Note que

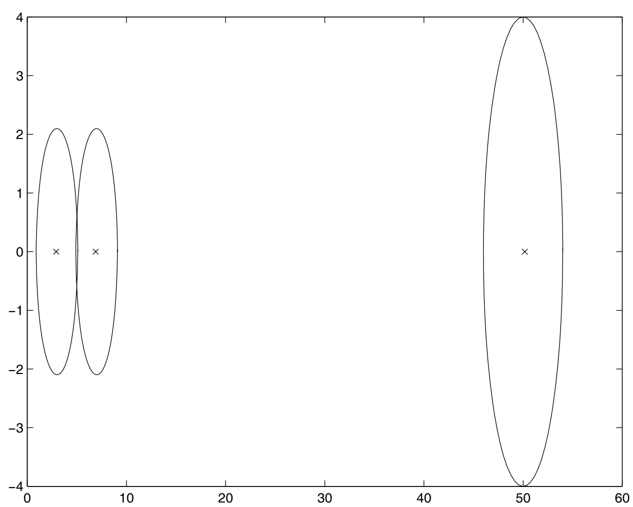

Figura 2: Discos de Gerschgorin para la matriz del Ejemplo (2).

como el disco con centro en 50 esta disjunto de los demás, B tiene exactamente un valor propio en el intervalo $[46, 54]$. Veamos una forma de obtener estimados mas exactos. Multiplicamos las primeras dos filas de B por 0.1 y luego multiplicamos las primeras dos columnas por 10. Esto se logra mediante la transformación de similitud:

```
D=diag([0.1, 0.1, 1]);
C=D*B*inv(D);
```

lo cual resulta en

```
C =

    3.0000    0.1000    0.2000
    0.1000    7.0000    0.2000
   20.0000   20.0000   50.0000
```

La nueva matriz C tiene los mismos valores propios que B ya que son similares. Utilizando C podemos hallar intervalos que contengan los otros dos valores propios de B. De hecho los discos de C son todos disjuntos lo que nos da que A tiene un valor propio en cada uno de los intervalos $[2.7, 3.3]$, $[6.7, 7.3]$ y con lo que habíamos calculado antes, otro valor propio en $[46, 54]$. Los discos de C se muestran en la Figura (3).

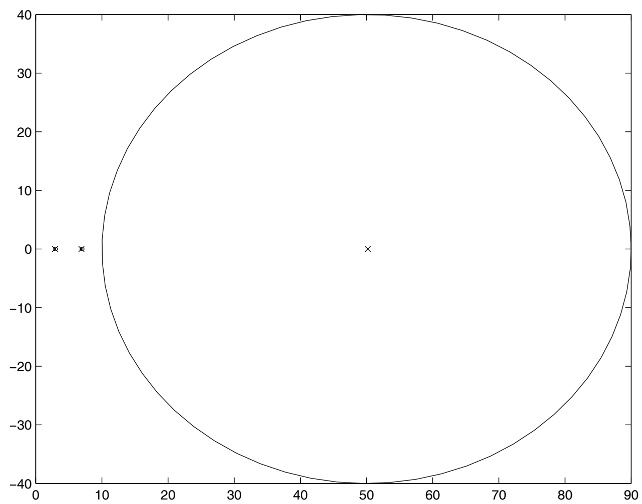

Figura 3: Discos de Gerschgorin para la matriz C del Ejemplo (2).