Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
Humacao, Puerto Rico 00791

MATE 4061 Análisis Numérico Prof. Pablo Negrón

Laboratorio 9: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

En este laboratorio nos concentraremos en la parte mecánica de resolver problemas de valor inicial usando las subrutinas de MATLAB. Vamos a trabajar únicamente con la función `ode45` pero todas las otras funciones de MATLAB para resolver problemas de valor inicial se usan de la misma manera. La secuencia básica de llamada de esta función es:

```
[t,y]=ode45('f',tspan,y0);
```

donde:

f: es el nombre de una función que evalúa el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales. Esta función debe devolver como resultado un vector columna.

tspan: es un vector que contiene el punto inicial y final del intervalo donde se va a resolver la ecuaci;on diferencial.

y0: es el vector de la condición inicial.

Ejemplo 1 (Ecuación Escalar de Orden Uno). Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = -9.8 + 0.1y(t)^2 \quad , \quad 0 < t < 10, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

La función que evalúa el lado derecho es:

```
function f=ejem1(t,y)
f=-9.8+0.1*y^2;
```

Ahora calculamos la solución del PVI y la dibujamos con:

```
[t,y]=ode45('ejem1',[0,10],5);
plot(t,y)
xlabel('t')
ylabel('y')
```

Ejemplo 2 (Sistema de Ecuaciones de Orden Uno). Considere el siguiente modelo simplificado del corazón donde $x(t)$ representa el largo de una cierta fibra ó músculo del corazón y $s(t)$ representa un estimulo (eléctrico) aplicado:

$$\begin{cases} x'(t) = \mu(-s(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + px(t)), \\ s'(t) = x(t)/\mu. \end{cases}$$

Aquí μ y p son parámetros del modelo. El lado derecho del sistema lo evaluamos mediante la siguiente subrutina en MATLAB:

```
function f=heart(t,y);
%
%  y(1) representa x(t) y y(2) representa s(t)
%
global mheart pheart
f=zeros(2,1);
f(1)=mheart*(-y(2)-y(1)^3/3+pheart*y(1));
f(2)=y(1)/mheart;
```

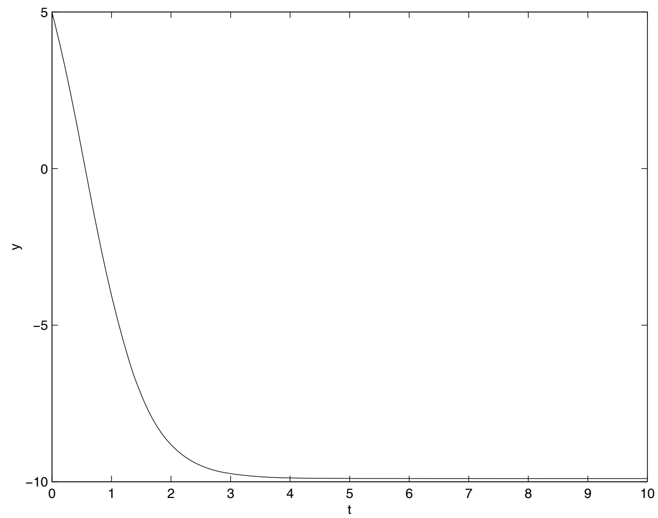

Figura 1: Solución numérica del PVI del Ejemplo 1.

Note el uso de la instrucción `global` que declara las variables `mheart` y `pheart` como variables globales las cuales son accesibles por cualquier rutina o programa con una instrucción `global` igual. Usamos las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $s(0) = -1$ y los valores de $\mu = 0.5$ y $p = 1$. Ahora aproximamos la solución con la siguiente secuencia de instrucciones en MATLAB:

```
global mheart pheart
mheart=0.5;
pheart=1;
[t,y]=ode45('heart',[0,10],[0,-1]);
plot(t,y(:,1),'k-',t,y(:,2),'k.')
xlabel('t');ylabel('y');
legend('x(t)','s(t)')
```

lo cual produce la Figura (2).

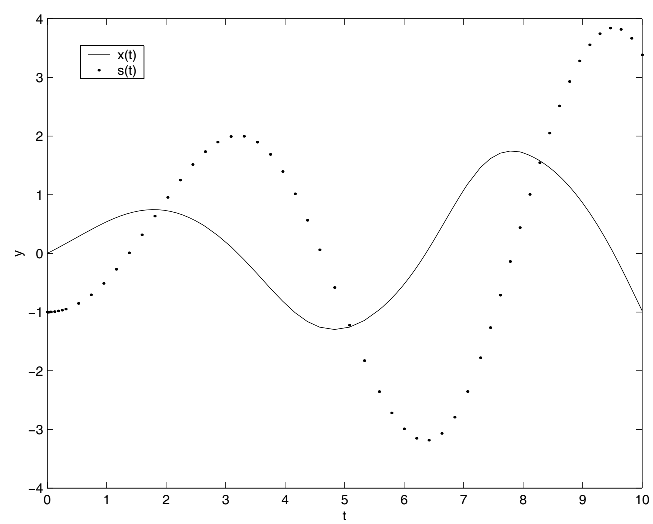

Figura 2: Solución numérica de un modelo del corazón.

Ejemplo 3 (Ecuación Escalar de Orden Dos). Considere el problema de valor inicial para la siguiente ecuación de orden dos:

$$\begin{cases} 2x''(t) + 4x'(t)^2 - 2x(t) = \cos(x(t)) \quad , \quad 0 < t < 4, \\ x(0) = 2 \quad , \quad x'(0) = 10. \end{cases}$$

Haciendo la sustitución ó cambio de variables $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, entonces el problema de arriba es equivalente al siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -2x_2(t)^2 + 2x_1(t) + \frac{1}{2}\cos(x_1(t)), \\ x_1(0) = 2 \quad , \quad x_2(0) = 10. \end{cases}$$

Definimos ahora la siguiente función en MATLAB para evaluar el lado derecho:

```
function f=ejem3(t,y)
f=zeros(2,1);
f(1)=y(2);
f(2)==-2*y(2)^2+2*y(1)+0.5*cos(y(1));
```

Este sistema puede ser resuelto ahora en forma similar al ejemplo anterior mediante la instrucción:

```
[t,y]=ode45('ejem3',[0 4],[2,10]);
```

Ejemplo 4 (Sistema de Ecuaciones de Orden Dos). Consideramos aquí las ecuaciones diferenciales que se obtienen de las leyes de Newton aplicadas al problema de dos cuerpos. Suponemos que uno de los cuerpos es mucho más masivo que el otro de modo que su movimiento es descartable, e.g., la tierra y un satélite. Suponemos también que el movimiento es en un plano. Como la fuerza gravitacional es inversamente proporcional a la distancia entre los cuerpos, tenemos tomando todas las constantes envueltas como uno, que la posición $(x(t), y(t))$ del cuerpo pequeño esta dada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x''(t) = -\dfrac{x(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}, \\ \\ y''(t) = -\dfrac{y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Tomamos como condiciones iniciales $x(0) = 0.4, x'(0) = 0, y(0) = 0.1, y'(0) = 2$. Debido a que este es un sistema de orden dos, tenemos que hacer la sustitución:

$$u_1(t) = x(t) \quad , \quad u_2(t) = x'(t) \quad , \quad u_3(t) = y(t) \quad , \quad u_4(t) = y'(t),$$

lo cual transforma el sistema de arriba al siguiente sistema de orden uno:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = -u_1(t)/(u_1(t)^2 + u_3(t)^2)^{3/2}, \\ u_3'(t) = u_4(t), \\ u_4'(t) = -u_3(t)/(u_1(t)^2 + u_3(t)^2)^{3/2}, \end{cases}$$

donde $u_1(0) = 0.4, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0.1, u_4(0) = 2$. Definimos ahora la siguiente subrutina en MATLAB que evalúa el lado derecho de este sistema:

```
function f=satelite(t,u)
f=zeros(4,1);
denom=(u(1)^2+u(3)^2)^1.5;
f(1)=u(2);
f(2)=-u(1)/denom;
f(3)=u(4);
f(4)=-u(3)/denom;
```

Ahora calculamos y trazamos (ver Figura (3) la solución del problema de valor inicial con la siguiente secuencia de instrucciones en MATLAB. Note que trazamos el conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ para los valores de t generados en lugar de $(t, x(t))$ y $(t, y(t))$. Tenemos pues:

```
[t,y]=ode45('satelite',[0,10],[0.4,0,0.1,2]);
plot(y(:,1),y(:,3),'k')
xlabel('x');ylabel('y');
```

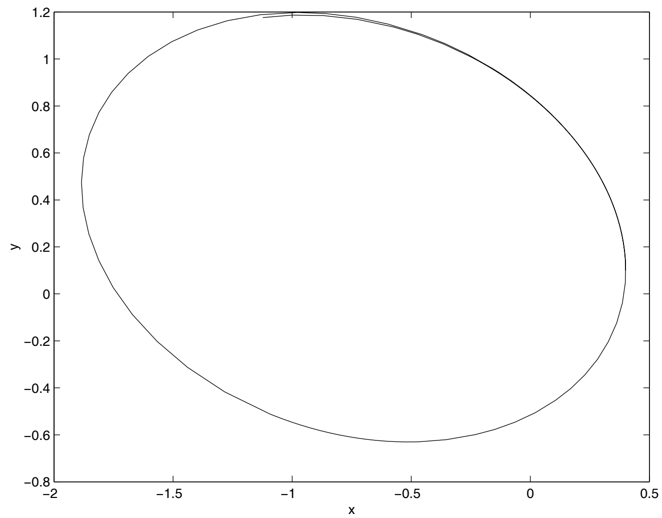

Figura 3: Solución particular del problema de dos cuerpos.

Note que la curva es efectivamente una elipse aunque esto se acentúa en la gráfica porque los ejes tienen unidades de largo distintas.

Ejercicio 1. El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)) \quad , \quad x(0) = 5 \\ y'(t) = y(t)(0.75x(t) - 1.5) \quad , \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

representa un modelo de presa–depredador donde $x(t)$ es el número (en alguna unidad, digamos miles) de animales presas y $y(t)$ es el número de depredadores en un tiempo t. Resuelva el sistema hasta $t = 1$ y trace las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en el mismo sistema de coordenadas.

Ejercicio 2. Las ecuaciones de Lorenz están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = s(y(t) - x(t)) \quad , \quad y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \quad , \quad z'(t) = x(t)y(t) - bz(t)$$

donde s, r, b son parámetros del sistema. Usando `ode45` con una tolerancia de 0.000005 resuelva las ecuaciones de Lorenz para $s = 10$, $r = 126.52$, $b = 6/3$, y con las condiciones iniciales $x(0) = -7.69$, $y(0) = -15.61$, $z(0) = 90.39$. Trace las soluciones calculadas como funciones de t. Trace las soluciones $x(t)$, $z(t)$ en el plano xz. Para los valores de s, r, b dados el sistema de Lorenz exhibe lo que se conoce como comportamiento *caótico*.

Ejercicio 3. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x''(t) = x(t)^2 - y(t) + e^t \quad , \quad x(0) = 0 \ , \ x'(0) = 0 \\ y''(t) = x(t) - y(t)^2 - e^t \quad , \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -2 \end{cases}$$

a) Mediante una sustitución apropiada convierta el sistema de orden dos dado a uno equivalente de primer orden.

b) Escriba las instrucciones necesarias en MATLAB para resolver el sistema de orden uno en el intervalo $[0, 2]$ incluyendo la gráfica de y vs x, usando la función `ode45`.