UNA EXPERIENCIA LLAMADA CALCULO

Por Alberto Cáceres, (a_caceres@cuhac.upr.clu.edu)

(DIALOGO UPR, abril 1999)

Estaba yo tensamente recostado en el sillón profesional y a punto de quedarme dormido por la anestesia cuando el dentista recordó que soy profesor en la universidad y consideró oportuno preguntarme qué materia enseño. Sin poder cerrar la boca, "a-e-á-i-a" le contesté,. "Ah!, Matemáticas", replicó haciendo gala de su destreza profesional de entender lenguaje sin consonantes. "Entonces usted enseña pre-cálculo y cálculo", agregó. "Í", le contesté, confirmando su acertada inferencia. Entonces nos contó a mi y a su enfermera que succionaba mi saliva con una bomba eléctrica, que en la universidad le había ido bien en pre-cálculo pues aprendió mucho en la "jai", pero que en cálculo su experiencia no fue igual. Podía haber sacado B pero falló en el último problema del examen final. "Esa fue la única C que tuve en la universidad", se lamentó. Tendido y boquiabierto no pude replicarle, pero me sentí aliviado porque no habría podido decirle nada inteligente. ¿Fue el Cálculo un escollo en su carrera?. El doctor es un profesional competente y exitoso, certificados de prestigiosa universidad adornan su bien equipado consultorio, da muy buen servicio a sus pacientes, le preocupa la salud oral de la población pues escribe artículos sobre el tema en el periódico local y sobretodo es un tipo chévere. ¿Merecía acaso que un profesor de matemáticas mancillara su expediente académico con una impertinente C?. ¿Qué hacía el Cálculo en ese currículo?

El Cálculo es una disciplina rica en ideas profundas, es un compendio de más de veinte siglos de ciencia y de investigación matemática. Es el resultado de la necesidad humana de tener un instrumento para comprender y explicar el universo. Su origen está ligado al estudio de los fenómenos naturales y no es, como se cree, magia de Newton o Leibnitz. Ellos fueron más bien los grandes sintetizadores de un cúmulo de matemática que en el siglo dieciocho estaba a la espera de sus genios que produzcan un cuerpo de doctrina. La famosa anécdota de la manzana, parte de la mitología del cálculo, no es sino el homenaje popular de la síntesis que hizo Newton, en sencilla ecuación diferencial, de la relación entre la fuerza y el movimiento. Representar al tiempo por medio del modelo continuo de los números reales permite ver al concepto de velocidad instantánea como un límite de velocidades promedio en minúsculos períodos de tiempo; he ahí la derivada. Sólo recurriendo a esa noción de límite es que podemos entender de manera precisa estos conceptos físicos de velocidad y aceleración. Para la ciencia no basta que entendamos intuitivamente el movimiento, cuantificarlo permite entender su dinámica. La carencia de una formulación matemática del movimiento llevó a los sofistas a perturbar el pensamiento griego —y evidenciar sus debilidades— con las paradojas de Zenon.

No sólo velocidades y aceleraciones son temas del cálculo. Toda razón de cambio de una variable respecto de otra es su dominio. Los costos y precios marginales (marginalismo en economía) son tasas de cambio, es decir, son derivadas. La variación del volumen de un gas con respecto a cualquiera de sus otros atributos como temperatura o presión es expresado como derivadas. La anestesia que el doctor me aplicó para adormecer mi encía se va a disipar en mi organismo siguiendo un modelo de decaimiento exponencial y esto lo sabemos gracias a que se puede observar las tasas de variación de la cantidad del fármaco en el organismo en relación al tiempo. Se puede determinar la edad de una pieza arqueológica porque se puede cuantificar la variación de la densidad de substancia radiactiva presente en materia orgánica muerta y compararla con el nivel de saturación al momento de morir. Esa variación, que es una derivada, sigue el mismo patrón que la disipación del fármaco en el organismo. Estos dos últimos fenómenos no son sino meras instancias de la función exponencial o de su inversa, la logarítmica, que gobierna un sinnúmero de fenómenos naturales y no naturales. El crecimiento de poblaciones en demografía o en bacteriología, el crecimiento del dinero con tasas de interés cambiantes en una economía vibrante como la contemporánea, la difusión del rumor, la complejidad de algoritmos en informática, etc., son otras de los muchos fenómenos que podemos estudiar gracias a que el cálculo conoce bien el comportamiento de la función exponencial. Curiosamente, esta función se define por una propiedad extraordinariamente simple: es su propia derivada.

Pero el cálculo no sólo es explicación de fenómenos naturales o tecnológicos, es un cuerpo de doctrina con sus propios problemas cuyo estudio más profundo es el campo del análisis matemático. En el comienzo había dos disciplinas ajenas una de otra. Una se ocupaba de la noción de derivada, de cambio instantáneo de una variable en relación a otra, de tangentes a curvas. Por otro lado, el campo geométrico del cálculo de áreas, volúmenes y cualquier otro concepto al que se llegue por agregado o suma de partes pequeñas era otra disciplina. Sorprendentemente estos dos campos aparentemente disímiles están íntimamente ligados por el Teorema Fundamental del cálculo. Calcular tangentes es equivalente a hallar áreas, son problemas complementarios. Uno es derivación y el otro integración y son operaciones inversas o, más sencillamente, la integración produce antiderivadas y se usan antiderivadas para calcular integrales. Sin este concepto no podríamos resolver ecuaciones diferenciales, lenguaje con que la naturaleza nos habla.

Con tan monumental variedad de ideas, la experiencia universitaria del cálculo debería ser como un viaje de aventuras a través de rica selva. Pero en un viaje así, cada cual obtiene una vivencia diferente, algunos se hastían y ven todos los idas las mismas aguas y las mismas plantas y abandonan la jornada, otros en cambio saborean los frutos y guardan sus semillas esperando cultivarlas alguna vez. Para algunos es un simple viaje obligado, o el temido rito de iniciación de extraña hermandad, para otros es el umbral de un mundo de creación y compenetración con la naturaleza. Pero todos deben remar la embarcación mucho y muy fuerte y aún así disfrutar la jornada. Cálculo es el típico curso en el que los árboles no dejan ver el bosque. Podemos usar todo el tiempo en manipular símbolos sin entender conceptos. Así como buen dactilógrafo no implica buen escritor, conocer bien la sintaxis no basta para entender el cálculo. Es necesario elevarse por encima de la simbología y capturar las ideas, adueñárselas y usarlas en resolver problemas. Llegar al cálculo toma más de una década de aprendizaje de su lenguaje y su sintaxis y aun así la universidad tiene que dar un curso preparatorio. No hay pre-química, no hay pre-literatura. Hay pre-cálculo.

Pero parece que pre-calculo no es la verdadera antesala. Cálculo sigue siendo uno de los cursos de más alto fracaso en la universidad. Muchos estudiantes exitosos en cualquier otra materia encuentran insalvables dificultades en cálculo. Las crisis van desde el irremediable tedio hasta la frustración por no poder asimilar a tiempo conceptos medulares. Conceptos que de no ser captados en toda su dimensión inhiben el progreso en un curso que es acumulativo y que debe cubrir cierto terreno en cierto tiempo. A finales de la pasada década muchos educadores intentaron resolver el problema del fracaso. Hubo esencialmente dos enfoques cuyas premisas suponían pobreza didáctica y énfasis dañino en la mera manipulación simbólica. Se reformó el enfoque hacia la captación de las ideas antes que al manejo de los símbolos, se cambió de la enseñanza dictatorial hacia la cooperativa. En ambos casos, informó la *Mathematical Association of America*, hubo mejoras aunque de poca significación. En la enseñanza cooperativa, aunque sus seguidores rechazaron toda evaluación comparativa por haber planteado objetivos diferentes, alguna inevitable comparación se hizo y el progreso más notable fue una reducción del abandono del curso antes de su finalización. Aparentemente en democracia hay menos tedio, no necesariamente más aprendizaje.

A mediados de la década pasada la educadora y feminista Sheila Tobias, reconoció a las matemáticas como un factor de la escasa presencia de mujeres en las profesiones científicas, se ocupó conspicuamente del problema. Hizo dos cosas. Primero, consciente de que el mundo de las ciencias usa ideas y conceptos y lenguaje incomprensible para otros campos, decidió matricularse en cálculo. Segundo, con metodología de las ciencias sociales estudió el problema del fracaso en cálculo. Hizo entrevistas y experimentos; detectó estudiantes que llamó del *second tier*. El primer *tier* lo forman estudiantes que no importa quién ni como se les enseña cálculo, siempre saldrán exitosos. El *second tier* ("they are not dumb, they are different") son aquéllos no menos brillantes que animados por las buenas notas de su educación preuniversitaria deciden estudiar ciencias o ingeniería y cuando enfrentan cálculo quedan apagados, abrumados y en desaliento frente a material incomprensible. Las personas que trabajaron en la investigación eran fracasados en cálculo graduados o profesionales exitosos que fueron contratados para retomar cálculo sin la presión de requisito curricular. Tobias encontró que en muchos de los casos era la metodología de la enseñanza lo que apagaba aspiraciones. Supo de docentes que recitaban al pizarrón, de ausencia de diálogo o discusión de ideas, de robotización para pasar exámenes. También supo de docentes que aun enseñando dictatorialmente contagiaban entusiasmo hasta a los más escépticos.

Calculo es una disciplina practicada y enseñada por seres humanos y por ello la experiencia del calculo está irremediablemente saturada, contaminada, de virtudes y defectos humanos. Aun cuando mi dentista se puede lamentar de su medio fracaso en cálculo, estoy seguro que por simplemente haber estado expuesto a esas ideas y haberlas entendido, quedó enriquecido y pudo entender mejor y tener éxito en las ciencias que respaldan su oficio.

FIN