§1. INTRODUCCION

"Los **teo***remas apelan a los dioses,*
las **demons***traciones a los demonios."*

Una prueba o demostración en matemáticas es un argumento que convence. Nos convence de que cierta afirmación, llámese teorema, lema, corolario o simple ejercicio, es verdadera. Contrario a la resolución de una ecuación que es una secuencia de expresiones equivalentes, descendentes en grado de complejidad, una prueba es una cadena de ideas y aserciones que forman un argumento coherente. La concatenacion de estas ideas depende en primer lugar de que tengamos las ideas y luego que consigamos la coherencia de ellas para lograr una demostración.

Conseguir las ideas es la esencia de hacer matemática. Es "ver" las relaciones entre los objetos matemáticos. Esta visión depende de cuán profundamente conocemos esos objetos, de cuán profundamente nuestro pensamiento penetra en la esencia de ellos, y de cuán entrenados estamos en establecer relaciones entre objetos. Para eso se estudia matemáticas. También depende de cualidades personales. A veces algunos matemáticos "ven" relaciones que otros, por décadas, no las han visto cuando "estaban allí". Es notable el caso de Herstein [H] y la prueba de que un polinomio no tiene más raices que su grado. Por muchos años los textos –y tratados– de álgebra recurrieron a la derivada formal de un polinomio para establecer este hecho. En 1987, Herstein publicó una sencilla prueba nunca antes "vista" por nadie de los que habíamos estudiado algebra hasta entonces.

Se expresa una prueba en un párrafo o conjunto de párrafos. Escribir una prueba matemática es escribir prosa, prosa sólida (no florida, sólida), compuesta de afirmaciones cuya veracidad es respaldada por verdades previamente establecidas en la misma prosa o en el conocimiento general de la comunidad que estudia matemáticas. Esta prosa a menudo está acompañada de cómputos algebraicos que respaldan la veracidad de lo que decimos. El apoyo en verdades previamente establecidas es esencial para construir una prueba. A una prueba hecha siguiendo estos estándares, los matemáticos la llaman prueba analítica.

Por ejemplo, al probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo es 180 veces el número de lados menos tres ($180(n-3)$), en realidad estamos usando el hecho "conocido" de que *la suma de los ángulos internos de un triángulo es* 180 *grados.* Dependerá de quién va a leer nuestra prueba para decidir si debemos simplemente referirnos a esta verdad o si debemos también probarla para hacer completo el argumento.

En general los matemáticos convencen o se convencen expresando sus ideas verbalmente y pueden estar seguros de lo que dicen o escuchan dándose referencias sobre hechos previamente establecidos.

Como todo estudiante de escuela superior, mi primer encuentro con una demostración matemática fue en la clase de geometría. Me era divertido ver la concatenación de ideas, por ejemplo, en la prueba de que dos ángulos de lados perpendiculares son congruentes o suplementarios. El hecho de que los conceptos geométricos de la escuela puedan representarse con figuras constituye una notable ayuda en poder intuir relaciones y poder derivar conclusiones. Esa interrelación entre conceptos e imágenes agrega atractivo a la geometría. No es así en álgebra, en teoría de números o en análisis. La primera vez que vi una prueba fuera de la geometría fue un problema de un libro de álgebra que pedía demostrar que el producto de tres números enteros consecutivos, es siempre divisible por 6 (ver §3, Ejemplo 1). El uso de argumentos para establecer esta verdad incólume para un conjunto infinito de números era un hecho fascinante. Ninguna otra ciencia da ese poder.

Una prueba matemática a veces es muy corta, de dos, tres o cinco afirmaciones como los ejemplos referidos en el párrafo anterior, o puede ser muy larga. En la matemática contemporánea hay dos ejemplos notables de pruebas muy largas. Uno de ellos, el último teorema de Fermat, es de larga historia –350 años– y de larga teoría. Mucha matemática tuvo que hacerse, muchísimos resultados intermedios tuvieron que ser probados antes de que Andrew Wiles, el 23 de junio de 1993, pudiera establecer finalmente su veracidad. Hay tanta matemática en esa prueba que muy pocos matemáticos en el mundo (menos de 100, se dice) están suficientemente preparados para seguirla en cada detalle. El otro ejemplo es el famoso problema de los 4 colores que afirma que no se necesita más de 4 colores para colorear un mapa de países en un continente si dos países adyacentes deben tener colores diferentes. Por siglos esta conjetura se mantuvo como posiblemente cierta, hasta que en 1972, Kenneth Appel and Wolfgang Haken, reduciendo hábilmente la inmensidad del problema a unos pocos casos, con ayuda de computadoras lograron agotar todas las posibilidades de todos los posibles mapas y mostrar que cuatro colores bastaban. Dentro de la ortodoxia matemática, esta prueba mantiene escépticos a algunos matemáticos, pues la ayuda del computador ha insertado elementos no humanos en una ciencia humana por excelencia.