

§2 VALOR DE LAS DEFINICIONES

No podemos afirmar que una persona es veraz si no tenemos una idea clara de lo que significa *veraz*. Pero no basta que tengamos una idea clara, es necesario que alguien comparta nuestra idea de veraz, especialmente la persona a quien nos dirigimos. Para ello debemos verbalizar nuestra noción de veraz y asegurarnos que nuestro interlocutor esté de acuerdo. Eso es establecer una definición. Tan pronto estemos de acuerdo en nuestra definición de veraz podremos clasificar a nuestros conocidos como veraces y no veraces.

Para tener rigor debemos tener definiciones rigurosas. Todos sabemos más o menos sin rigor lo que es una *familia pobre*, pero ese concepto tan poco preciso sólo nos sirve para entendernos coloquialmente. Los gobiernos sin embargo definen *familia pobre* con el rigor de los números, estableciendo que una familia es pobre si su ingreso en moneda, en un año, no es mayor que cierto límite. Esta definición entonces permite establecer programas de ayuda social.

Estamos habituados en la escuela a que las definiciones sean sólo descripciones de objetos o conceptos. ¿No nos dieron acaso una definición de *Historia*? En matemáticas las definiciones son herramientas de mucho poder. Tienen el poder descriptivo que todos esperamos de una definición y tienen también el poder de permitir hacer inferencias o de derivar conclusiones.

En lo que sigue veremos cómo es indispensable tener definiciones precisas para poder probar o establecer resultados.

Ejemplo 1. *Probar que el cuadrado de un número entero par es un número par.*

Comentario: Esta es una verdad fácil de *verificar*. 2 es par y su cuadrado es 4 que también es par. También 24 es par y $24^2 = 576$ también es par. Pero por más verificaciones que hagamos, ellas, ni el conjunto de todas ellas, constituyen una prueba. La prueba debe hacerse *para todo número par*. Para eso necesitamos una *clara definición* de número par.

Definición 1. *Un entero es par si es divisible por 2.*

Aunque estemos de acuerdo en que esta oración define bien un número par, no es muy útil porque la noción de “divisible” no la tenemos claramente definida. En matemáticas las definiciones más útiles son las que se puede expresar con ecuaciones y la noción de divisibilidad puede darse con una ecuación. Así un número N es divisible por 2 si se puede expresar como $N = 2x$. (He aquí una ecuación).

Las ecuaciones son muy útiles; nuestra álgebra temprana nos enseñó a simplificarlas, complicarlas, manipularlas y si seguimos las reglas algebraicas con rigor, fidelidad y creatividad podemos extraer mucha información de ellas. Entonces expresamos otra definición de número par, más precisa y más útil.

Definición 2. *Un número entero N es par si existe otro entero x tal que $N = 2x$.*

Las definiciones en matemáticas son equivalencias lógicas. Es decir, lo definido (un número entero N es par) y su definición (existe otro entero x tal que $N = 2x$) deben ser equivalentes. En lugar de conectar ambas aseveraciones con “si” lo correcto es conectarlas con “sii”, que significa “si y sólo si”, lo cual hace más clara la equivalencia lógica. Esto quiere decir que si se está frente a un número de la forma $N = 2x$ entonces podemos afirmar que N es par (“si”), y si sabemos que N es par entonces podemos afirmar que tiene la forma $N = 2x$ (“sólo si”). La presencia de “sii” es indispensable en teoremas que establecen equivalencias lógicas. Estos por lo general son los resultados más bellos. El teorema de Pitágoras por ejemplo es una equivalencia lógica. “*Un triángulo con lados a, b, c , ($a > b, c$) es rectángulo ‘sii’ $a^2 = b^2 + c^2$ ”*. En las definiciones se prefiere “si” a “sii” para evitar que suene cacofónico o pedante, pero es sólo una cuestión de estilo. Hasta aquí el comentario y te prometo lector que no volveré a cansarte con similar diatriba. Vamos ahora a la prueba del ejemplo 1. Usaremos la definición 2.

Prueba: Si N es par, entonces existe un entero x que nos permite escribir

$$N = 2x$$

Como nos interesa averiguar cómo es N^2 , cuadramos ambos miembros de la ecuación y obtenemos

$$N^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

Ahora convenientemente mostraremos lo que nos interesa para convencer, es decir reescribimos N^2 como

$$N^2 = 2(2x^2)$$

y si llamamos $y = 2x^2$, tenemos $N^2 = 2y$ lo que muestra según nuestra definición que N^2 es par. ■

Problema. 2.1. Probar que el cuadrado de un número entero impar es un número impar.

Problema. 2.2. Probar que si un número entero es múltiplo de otro número p , su cuadrado también lo es.

Problema. 2.3 Probar que la suma de dos números impares es par.

Definición. Un número x es 2-radical si se puede escribir como $x = a + b\sqrt{2}$ donde a y b son enteros y $\sqrt{2}$ es la raíz cuadrada de 2.

Problema. 2.4. Probar que la suma de dos números 2-radical es un número 2-radical.

Problema. 2.5. Probar que el producto de dos números 2-radical es un número 2-radical.

Problema. 2.6. Probar que el cociente de dos números 2-radical es un número 2-radical.