§3. NUMEROS

Ejemplo 1. *Probar que si se multiplica tres números enteros positivos consecutivos el producto es siempre múltiplo de* 6.

> *Comentario:* Un número N es múltiplo de 6 si se puede escribir en la forma $N = 6x$, es decir, tiene un factor 6 o es divisible por 6. Pero si un número tiene un factor 6 entonces tiene factores 2 y 3. Es decir, un número es múltiplo de 6 si lo es de 2 y de 3. Todo lo que tenemos que probar entonces es que en el producto de tres números consecutivos aparecen siempre el factor 2 y el factor 3.

Prueba:(Corta) En tres números consecutivos uno de ellos tiene que ser par. Si el primero no lo es, el segundo lo es. También uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3. Entonces en el producto hay factor 2 y hay factor 3. $\blacksquare$

Prueba:(Larga) Alguien podría no querer aceptar que de los tres números consecutivos, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3. Probemos entonces eso: si el primer número es múltiplo de 3 entonces no hay nada que probar . Si este número no es múltiplo de 3 entonces deja resíduo al dividirse por 3, es decir, tendría una de las dos formas siguientes: $N = 3x + 2$ ó $N = 3x + 1$. Si este primer número tiene la forma $N = 3x + 2$, el segundo será $N = (3x + 2) + 1 = 3x + 3 = 3(x + 1)$ y es entonces múltiplo de 3. Finalmente si el primer número tiene la forma $N = 3x + 1$ entonces el tercero $N = (3x + 1) + 2 = 3(x + 1)$ es múltiplo de 3. $\blacksquare$

Problema. *3.1. Probar que si se multiplica cuatro números consecutivos el producto es siempre múltiplo de* 24.

Problema. *3.2. Probar que si se suma* 1 *al producto de dos impares consecutivos el resultado es cuadrado perfecto.*

Problema. *3.3. Probar que la suma de los n primeros números impares consecutivos es igual a n^2 (un cuadrado perfecto)*

Ejemplo 2. *Probar que si un número termina en* 5, *su cuadrado termina en* 25.

> *Comentario:* Una prueba deberá empezar por identificar a los números que "terminan en 5", de preferencia con una ecuación. Un número N termina en 5 (como 35, 585, 12345) si es de la forma $N = 10x + 5$ para algún x y termina en 25 si es de la forma $N = 100y + 25$. Y tenemos entonces a los dos objetos de nuestro problema expresados con sendas ecuaciones.

Prueba: Si un número N termina en 5 entonces tiene la forma $N = 10x + 5$. Como nos interesa el cuadrado de N, elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y obtenemos $N^2 = (10x + 5)^2$ que convenientemente manipulamos para obtener

$$\begin{aligned} N^2 &= (10x + 5)^2 \\ &= (10x)^2 + 2(10x)(5) + 5^2 \\ &= 100x^2 + 100x + 25 \\ &= 100(x^2 + x) + 25 \end{aligned}$$

y se ve que N^2 debe terminar en 25. La parte $100y$ siempre termina en dos ceros y no afecta al 25. Por tanto N^2 termina en 25 ■

Divisibilidad

Sabemos que un número a es divisible por x cuando al hacer la división $a \div x$ ésta no deja resíduo. Definir divisibilidad de esta forma es poco útil, en primer lugar porque se usa una afirmación negativa "no deja resíduo" y en segundo lugar porque se habla del resíduo que es innecesario. Pero no desaprovechemos esta noción que no es incorrecta. Al hacer una divisón $a \div x$, además del residuo r hay un cociente c y todos estos números cumplen la condición

$$a = cx + r$$

Si el residuo es cero, $r = 0$, queda $a = cx$. Esta es una ecuación y nos sirve bien para definición de divisibilidad.

Definición. *Un número a es divisible por otro $x \neq 0$, si existe un tercer número c tal que $a = cx$.*

Notación: "a es divisible por x" también se expresa en forma activa como "x divide a a" ó "x es divisor de a". También se dice "a es múltiplo de x". Todas estas expresiones dicen lo mismo y se expresan simbólicamente así

$$x|a$$

La barra es estrictamente vertical y expresa una relación entre a y x, no el resultado de una división. No confundir con $\frac{x}{a}$ ni $\frac{a}{x}$. Para dejar todo en claro, $x|a$ quiere decir que la fracción $\frac{a}{x}$ es un entero c (no hay residuo) y por tanto $a = cx$. La definición nos da algunos hechos obvios: $a|a, \quad \pm 1|a, \quad x|0$. Si x no divide a a se escribe $x \not| a$.

Ejemplo 1. *Probar que $x|a$ y $x|b \Rightarrow x|(a+b)$*

Prueba: Por definición $x|a$ y $x|b$ implican la existencia de sendos factores c, d tales que $a = cx$ y $b = dx$. Como nos interesa $a+b$, sumamos ambas ecuaciones, $a + b = cx + dx$ y factorizamos x para obtener $a + b = (c + d)x$ y claramente con cociente $(c + d)$ concluimos que $x|(a + b)$ ∎

Problema. *3.4. Probar que si $x|a$, y b es un entero cualquiera entonces $x|(ab)$*

Problema. *3.5. Probar que si $x|a$ y n es un entero positivo entonces $x^n|a^n$*

Problema. *3.6. Probar que si $x|a$, $x|(a + b)$ entonces $x|b$*

Problema. *3.7. Probar que si a , n son enteros, $a \neq 1$ y $n > 0$ entonces $(a - 1)|(a^n - 1)$*

Comentario: Este es un problema de factorización. Si no conoce esa factorización puede descubrirla estudiando los casos $n = 2$ y $n = 3$. También se puede probar por inducción sin necesidad de conocer el otro factor. Inducción es tema del capítulo 8.

Problema. *3.8. Probar que si a,b,n son enteros, $a \neq b$ y $n > 0$ entonces $(a-b)|(a^n - b^n)$*

Problema. *3.9. Probar que si $k|n$, y $a \neq b$, entonces*

$$a \neq b \Rightarrow (a^k - b^k)|(a^n - b^n)$$

Problema. *3.10. Probar que si $k < n$ y*

$$(a^k - b^k)|(a^n - b^n) \Rightarrow k|n$$

Ejemplo 2. *(Divisibilidad por 3) Sea N un entero. Probar que 3 divide a N si y sólo si 3 divide a la suma de los dígitos (de la representación decimal) de N.*

Comentario: En la escuela hemos aprendido este criterio. Por ejemplo $3|123$ porque $1 + 2 + 3 = 6$ que es divisible por 3.

"Un número es divisible por 3 **si** la suma de sus dígitos es divisble por 3". (Aquí decimos 3| (suma de dígitos) $\Rightarrow 3|N$). Y **sólo si** , porque si 3 no divide a la suma de los dígitos entonces N **no** es múltiplo de 3, es decir, $3\not|$(suma de dígitos) $\Rightarrow 3\not|N$. Dicho equivalentemente (contraposición) , $3|N \Rightarrow 3|$(suma de dígitos). Por tanto, el criterio correctamente debe ser "Un número es divisible por 3 *sí y sólo* si la suma de sus dígitos es divisible por 3", que lo hace un verdadero *criterio.*

Una forma elegante (?) de expresar una equivalencia entre dos proposiciones es diciendo que una es "**condición necesaria y suficiente**" de la otra. En este caso, "3| (suma de dígitos)" es *condición suficiente* para "$3|N$", porque *basta que (es suficiente que)* 3 divida a la suma de dígitos para concluir que 3 divide a N. Esta es la parte "si" o flecha a la izquierda ($\Leftarrow$) de los enunciados anteriores.

Pero también es *condición necesaria* por que de $3|N$ se sigue *necesariamente* que "3| (suma de dígitos)". Esta es la parte "sólo si" o flecha a derecha ($\Rightarrow$) de los enunciados anteriores.

Para establecer esta equivalencia debemos probar las dos implicaciones: Una es la flecha a derecha ($\Rightarrow$, o parte "sólo si" o "condición necesaria") y la otra es flecha a izquierda($\Leftarrow$, o parte "si" o "condición suficiente").

También necesitamos entender bien el valor posicional de los dígitos en la expresión decimal de un número, por ejemplo en el número 3492 los dígitos $3, 4, 9,$ y 2 ocupan posiciones específicas y responden a la expansión decimal de 3492 como

$$3492 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Prueba: Antes de escoger alguna de las partes "si" ó "sólo si" veamos, por simplicidad, la expresión decimal de un número de 3 dígitos d_2, d_1, d_0, es decir, $N = d_2d_1d_0$. O mejor, desplegando según la posición, escribimos

$$N = d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$
$$N = d_2 \times 100 + d_1 \times 10 + d_0$$
$$N = d_2 \times (99 + 1) + d_1(9 + 1) + d_0$$
$$N = d_2 \times 99 + d_1 \times 9 + d_2 + d_1 + d_0$$
$$N = 3(d_2 \times 33 + d_1 3) + d_2 + d_1 + d_0$$

Como el término $3(d_2 \times 33 + d_1 \times 3)$ ya tiene factor 3, se puede concluir inmediatamente que N es divisible por 3 si y sólo si la suma de dígitos $d_2 + d_1 + d_0$ es divisible por 3. Y queda terminado. Pero si queremos ser más explicítos diremos:

Parte "si": Si la suma de dígitos $d_2 + d_1 + d_0$ es divisible por 3, y como $3(d_2 \times 333 + d_1 \times 33)$ también lo es, por el Ejemplo 1, concluimos que N es divisible por 3.

Parte "sólo si": Escribimos $d_2 + d_1 + d_0 = N - 3(d_2 \times 333 + d_1 \times 33)$ y ahora "N divisible por 3" implica que la suma de los dígitos $d_2 + d_1 + d_0$ es divisible por 3.

Para números de más de 3 dígitos, sólo habrá que agregar los incómodos puntos suspensivos. ∎

Problema. *3.11. (Divisibilidad por* 9*) Probar que un número es divisible por* 9 *si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por* 9*.*

Problema. *3.12. (Divisibilidad por* 11*) Probar que un número es divisible por* 11*, si y sólo si la diferencia entre la suma de sus dígitos de posiciones pares y la suma de sus dígitos de posiciones impares es divisible por* 11*.*

Problema. *3.13. (Divisibilidad por* 7 *o regla 231) Un número de tres cifras es divible por* 7 *si y sólo si al sumar* 2 *veces el dígito centeno más* 3 *veces el dígito deceno más el dígito unidad, el resultado es múltiplo de* 7*.*

Problema. *3.14. (Divisibilidad por* 7*) Un número de cuatro o más cifras es divible por* 7 *si y sólo si al restar el número obtenido al mutilarle los tres dígitos menores, menos la suma de* 2 *veces el dígito centeno más* 3 *veces el dígito deceno más el dígito unidad, el resultado es múltiplo de* 7*.*