

§5. VALOR ABSOLUTO Y VECTORES

Todo estudiante de escuela superior sabe hallar el valor absoluto de cualquier número, sin embargo tiene dificultades al resolver la ecuación $|x| = 1$, le cuesta entender que $|x + y| \leq |x| + |y|$ sea cierto para cualquier par de números x, y y le es más difícil aún probarlo.

Para entender el valor absoluto, necesitamos entender bien el concepto. Piense en valor absoluto de un número como su distancia al cero. Pero necesitamos una definición.

Definición. *El valor absoluto de un número x es el mismo número x cuando $x \geq 0$, de otro modo es el negativo (u opuesto) de x .*

Se simplifica esta definición escribiendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Queremos decir que asignamos a $|x|$ lo que aparece a la derecha, según sea el caso.

Ejemplo 1. *Probar que $|-x| = |x|$*

Comentario: El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su negativo. Esto es obvio pero debemos probarlo. Consideraremos los dos casos de la definición y en ambos probaremos la igualdad.

Prueba: Si $x = 0$, $-0 = 0$ y la igualdad es cierta.

Si $x > 0$ entonces $|x| = x$ y también $-x < 0$. Para esto último, la definición establece que $|-x| = -(-x) = x$ y por tanto $|x| = |-x|$.

Queda al cuidado del lector hallar el argumento para el caso $x < 0$. ■

Ejemplo 2. *Probar que $|x| = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1$*

Comentario: La hipótesis dice que el valor absoluto de x es 1 y lo que vamos a probar es una disyunción, es decir,

sucede que $x = 1$ ó (aquí la disyunción) $x = -1$. Como la definición de valor absoluto está dada con una disyunción, esa disyunción será la base de la prueba.

Prueba: Si x es un número real entonces $x \geq 0$ ó $x < 0$. Si $x \geq 0$, por la definición de valor absoluto $x = |x|$ y por hipótesis $|x| = 1$, por tanto $x = 1$.

Por otra parte, si $x < 0$, $|x| = -x$. Como la hipótesis dice que $|x| = 1$, tenemos $-x = 1$, por tanto $x = -1$ ■

Problema. 5.1. Probar que $-|x| \leq x \leq |x|$.

Comentario: Expresiones como “ $a \leq b \leq c$ ” son en realidad dos desigualdades unidas por conjunción (y, ¿and?). Es decir debe probarse independientemente que $-|x| \leq x$ y que $x \leq |x|$. De nuevo, la definición es la base de esta prueba.

Problema. 5.2. Probar que si $k > 0$,

$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$

Comentario: Si el lector observa con cuidado, ésta es una aplicación directa del problema anterior. Sin embargo, a fin de reforzar las ideas, puede hacer una prueba usando la misma técnica usada en el problema anterior.

Problema. 5.3. Probar que si $k > 0$,

$$-k < x < k \Rightarrow |x| < k$$

Comentario: Los problemas 2 y 3 establecen una equivalencia entre ambas proposiciones y eso se expresa como: Si $k > 0$, $|x| < k$ si y sólo si $-k < x < k$.

Ejemplo 3. Probar que $|xy| = |x||y|$

Comentario: Al considerar los posibles signos de x y y , surgen cuatro alternativas que se pueden reducir a tres. La prueba entonces puede hacerse considerando esos casos. Mostraremos uno solo y los otros casos quedarán al cuidado del lector.

Prueba. Caso $x \geq 0, y < 0$:

Como $x \geq 0$, $|x| = x$. Como $y < 0$, $|y| = -y$. Por tanto $|x| \cdot |y| = x(-y) = -xy$. Por otra parte, como $xy \leq 0$, usando directamente la definición, tenemos $|xy| = -xy$. Por la aserción anterior concluimos que $|xy| = |x| \cdot |y|$. ■

Problema. 5.4. Probar que si $k > 0$, entonces $|kx| = k|x|$.

Problema. 5.5. Probar que si $y \neq 0$ $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

Comentario: La condición $y \neq 0$ tiene sólo el objetivo de asegurar que los cocientes existan.

Problema. 5.6. Probar que $|x + y| \leq |x| + |y|$

Comentario: El problema 3 nos da la clave para esta prueba. Si sabemos que un número x está entre un número k y su negativo ($-k < x < k$) podemos concluir que $|x| < k$. Entonces tendríamos que establecer que $x + y$ está entre $-(|x| + |y|)$ y $(|x| + |y|)$. Use el problema 1 para establecer este hecho. Redacte la prueba completa.

Problema. 5.7. $|x - y| \leq |x| + |y|$

Problema. 5.8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Comentario: De nuevo bastaría probar que $|x| - |y|$, sin barras, se encuentra entre $-|x - y|$ y $|x - y|$ para lo cual requiere un poquito de ingenio en el uso de los ejemplos y problemas anteriores. Luego use toda la fuerza del problema 3.

VECTORES

Un vector de dimensión 3 es una sucesión de tres números reales (x_1, x_2, x_3) para los cuales el orden en que aparecen los números es importante. El vector $(1, 2, 3)$ es diferente del vector $(1, 3, 2)$. Si la sucesión tiene cuatro números entonces la dimensión del vector es 4 y en general, para un entero positivo n , se define vectores de dimensión n .

Para representar un vector $\mathbf{v}$ de dimensión n (n es un entero indeterminado pero fijo) se usa cualquiera de las tres notaciones siguientes equivalentes.

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)_{i=1}^n = (x_i)$$

Los números reales x_i se llaman *componentes* del vector.

Hay dos atributos que identifican a un vector: su **magnitud** y su **dirección**. En caso de 2 ó 3 dimensiones, a los vectores se les representa con flechas y estos atributos son fácilmente reconocibles. La magnitud es el largo de la flecha y, la dirección, en dos dimensiones, es la tangente del ángulo que hace la flecha con un eje horizontal positivo, es decir la pendiente. En tres dimensiones la dirección es el paquete de cosenos directores de la flecha y ellos hacen un vector particular. Siendo la dirección otro vector, es fácil entonces extender esa noción a dimensiones mayores que 3.

Un vector de dos dimensiones $v = (x_1, x_2)$ representado en el plano como una flecha puede verse con origen en el origen $(0, 0)$ y extremo el punto (x_1, x_2) del plano. En ese caso la magnitud de $\mathbf{v}$ es la distancia del punto (x_1, x_2) al origen; al igual que el valor absoluto de un número es la distancia de ese número al origen, sea este positivo o negativo. Por Pitágoras sabemos que esa distancia es $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y por tanto la magnitud del vector v se define

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Definición. La *magnitud* (o *módulo*) de un vector $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de dimensión n es :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

La raíz cuadrada es siempre no negativa, por tanto lo primero que podemos decir es que $|\mathbf{v}| \geq 0$.

El módulo de un vector tiene propiedades similares a las de valor absoluto como se verá en los ejemplos y problemas.

Problema. 5.9 Probar que $|- \mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$

Comentario: $-\mathbf{v}$ es el negativo del vector $\mathbf{v} = (x_i)$ y se define como el vector formado por los negativos de los componentes: $-\mathbf{v} = (-x_i)$

Problema. 5.10. Probar que para todo componente x_i se tiene

$$-|\mathbf{v}| \leq x_i \leq |\mathbf{v}|$$

Problema. 5.11. Probar que si $\mathbf{v} = (x_i)$ entonces

$$\left| \sum x_i \right| \leq \frac{1}{n} |\mathbf{v}|$$

El producto escalar o producto **punto** de dos vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{w} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Entre producto punto y módulos hay una famosa desigualdad llamada Desigualdad de Cauchy-Schwarz que establece:

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| |\mathbf{w}|$$

Problema. 5.12 Suponiendo cierta la desigualdad de Cauchy-Schwarz probar la desigualdad triangular

$$|v + w| \leq |v| + |w|$$