

§6. FUNCIONES

La noción de función requiere de tres objetos: dos conjuntos y una regla. La regla relaciona los dos conjuntos de forma que a cada elemento de uno de los conjuntos, llamado *dominio*, le asocia un único, sin ambigüedad, elemento del otro conjunto, llamado alcance. *Dominio, regla y alcance* determinan una función.

La regla con frecuencia es una fórmula pero no tiene que ser así. Por cierto que fórmulas hacen más fácil la comprensión de una función, pero existen muchas funciones que no se rinden a fórmulas algebraicas.

Notación. La forma más tradicional de representar una función en abstracto es con el uso de variables.

$$y = f(x)$$

Aquí x se llama *argumento* y representa un elemento cualquiera del dominio. La letra f representa la regla, es decir, ese “programa” abstracto que dice qué le sucede a x del dominio para convertirse en el y del alcance. Globalmente el símbolo $f(x)$ representa lo que resulta de aplicar f a x . Por ejemplo, $f(x) = 3x + 2$ dice cómo se transforma x : “al triple de x se le suma 2”. Como el resultado de transformar un número x va a resultar en otro número, éste se representa con otra variable, con frecuencia y . Entonces se usa indistintamente las fórmulas siguientes

$$y = 3x + 2 \quad , \quad f(x) = 3x + 2$$

para representar la misma función. Pero así como usamos “ x ” y “ y ” podemos usar cualesquiera otras dos variables “ s ” y “ t ” por ejemplo $s = 3t + 2$, $f(t) = 3t + 2$ representan lo mismo que lo anterior.

En abstracto, cuando se quiere hablar de una función, sin especificar ninguna, se dice “la función $y = f(x)$ ” o simplemente “la función f ”.

Cuando se quiere especificar el dominio A y el alcance B de una función f se escribe

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ó} \quad f : A \longrightarrow B$$

y cuando se quiere mostrar que a $x \in A$ le corresponde $y \in B$ se escribe equivalentemente

$$y = f(x) \quad \text{ó} \quad f : x \longmapsto y$$

Inyectividad. Debe ser claro por la inambigüedad de lo que le corresponde a x que $f : x \longmapsto y$ y $f : x \longmapsto y'$. Es decir, el esquema

$$f : x \begin{matrix} \nearrow y \\ \searrow y' \end{matrix}$$

no es posible, a menos que $y = y'$.

Por otra parte, el esquema

$$\begin{array}{ccc} f : x & \searrow & \\ & & y \\ f : x' & \nearrow & \end{array}$$

sí está permitido. Tal es el caso de la función $f(x) = x^2$ cuando su dominio son todos los números reales. Para $x = 2$ y $x' = -2$, se tiene $f(2) = 4$, $f(-2) = 4$.

Funciones que evitan esta conducta se llaman **inyectivas o uno-a-uno** (1-1). Para ellas sucede que si $x \neq x'$ necesariamente $f(x) \neq f(x')$. Entonces podría definirse una función **inyectiva** naturalmente diciendo $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Pero las relaciones de no igualdad (\neq) son poco productivas y por ello usaremos la contraposición que como sabemos es equivalente.

Definición. Una función f es inyectiva ó 1-1 sii

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Ejemplo 1. Probar que toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ es inyectiva.

Comentario. El argumento de la función es x . Los símbolos a y b son constantes o parámetros de la función. En la prueba notará el lector la conveniencia de

definir función inyectiva con igualdades. Como queremos probar inyectividad supondremos $f(x) = f(x')$ y estableceremos que $x = x'$.

Prueba: $f(x) = f(x')$ quiere decir $ax + b = ax' + b$ y ésta es una ecuación que podemos simplificar cancelando b primero, para obtener $ax = ax'$, y dividiendo por $a \neq 0$ después. Es decir, queda $x = x'$ ■

Problema. 6.1 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones inyectivas. Probar que la composición $g \circ f$ es también inyectiva.

Comentario. Este es un ejemplo de cómo se usa una definición en las dos direcciones. Estableceremos que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ implica $x = x'$ y concluiremos que $g \circ f$ es inyectiva. En el camino usaremos la hipótesis que g es inyectiva y que $g(f(x)) = g(f(x'))$ para concluir que $f(x) = f(x')$. El lector puede hacer ahora la prueba formal completa.

Problema. 6.2 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones tales que $g \circ f$ es inyectiva. Probar que f es inyectiva.

Comentario. No pierda de vista el lector que va a probar que la inyectiva es f . El punto de partida deberá ser entonces $f(x) = f(x')$.

Surjectividad. Una función es suryectiva si cubre todo su alcance. Recordemos que el alcance es sólo el conjunto donde se deposita los resultados de aplicar la función a los argumentos. La definición de función no nos asegura que todo

el alcance sea cubierto. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ con dominio R , los números reales, y alcance R , los números reales, no cubre todos los elementos de su alcance. En efecto, los números negativos del alcance no son tocados por los resultados de usar f . En ese caso esta función $x^2 : R \rightarrow R$ no es suryectiva. Por cierto que si cambiamos el alcance de f a R_0^+ , el conjunto de los números reales no negativos, la función $x^2 : R \rightarrow R_0^+$ resulta suryectiva. Por tanto el problema es del alcance. Intrínsecamente toda función puede verse como suryectiva, para ello basta reducir convenientemente el alcance. Pero algunas veces no se sabe cómo reducir el alcance.

Las funciones suryectivas tienen mucho que ver con resolución de ecuaciones. Por ejemplo si tomamos un número real cualquiera positivo o negativo, c , podemos preguntarnos si existe solución de la ecuación $x^2 = c$. Al saber que $f(x) = x^2$ no es suryectiva nuestra respuesta es “no siempre”. Como sabemos algo más sobre $f(x) = x^2$ nuestra respuesta puede ser más precisa: “cuando $c < 0$ la ecuación no tiene solución y sí la tiene cuando $c \geq 0$ ”.

Vamos a formalizar un poco esta notación.

Definición. Una función $f : A \rightarrow C$ es suryectiva (o sobre, u “onto”) si para cada $c \in C$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = c$.

Esta definición, vista de otro modo, es equivalente a decir que para cada elemento $c \in C$, la ecuación $f(x) = c$ tiene solución.

Ejemplo 2. Probar que la función lineal $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ es suryectiva.

Comentario. Queremos probar que para cualquier $c \in R$ del alcance, podemos hallar x del dominio, tal que $f(x) = c$. Mejor dicho queremos averiguar si la ecuación $ax + b = c$ tiene solución. Para ello basta resolverla.

Prueba: Sea $c \in R$ un número real cualquiera de R . Tomamos el número $x = \frac{c-b}{a}$ que es genuino porque $a \neq 0$, entonces $f(x) = f\left(\frac{c-b}{a}\right) = a\left(\frac{c-b}{a}\right) + b = c$ ■

Problema. 6.3. Probar que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son suryectivas, entonces $g \circ f : A \rightarrow C$ es suryectiva.

Problema. 6.4. Probar que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones tales que $g \circ f$ es suryectiva entonces g es suryectiva.