

§7. CONTRAPOSICION Y REDUCCION AL ABSURDO.

En el §4 hemos visto cómo se usa la contraposición para hacer pruebas y también para hacer definiciones. La lógica establece que toda proposición es equivalente a su contrapositiva. La contrapositiva de “ $p \Rightarrow q$ ” es “ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ” y ambas son equivalentes. No confundirla con la recíproca de $p \Rightarrow q$ que es $q \Rightarrow p$ y no necesariamente son equivalentes.

Por ejemplo la implicación $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ es cierta. Por tanto su contrapositiva $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ es también cierta. Sin embargo su recíproca $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ no es cierta, es decir de saber que $x^2 = 1$ es cierta, no se puede afirmar que $x = 1$.

Se puede probar una implicación probando en su lugar su contrapositiva.

Ejemplo. *Sea x un entero. Probar que si x^2 es par entonces x es par.*

Comentario: El esquema lógico de esta prueba es

$$x^2 \text{ es par} \Rightarrow x \text{ es par}$$

En su lugar probaremos

$$x \text{ no es par} \Rightarrow x^2 \text{ no es par}$$

Prueba: Si x no es par entonces x es impar, por tanto podemos escribirlo como $x = 2t + 1$ para algún entero t . Cuadramos y obtenemos

$$x^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2(2t + 2) + 1 = 2s + 1$$

ciertamente no es par. ■

Problema. 7.1. *Probar que si x^2 es impar entonces x es impar.*

Problema. 7.2. *Probar que si x^2 es múltiplo de 3 entonces x es múltiplo de 3.*

Las pruebas por reducción al absurdo tienen un esquema lógico parecido a la contraposición. La idea es que si al suponer

cierta una afirmación A , ésta implica algo absurdo o contradictorio, entonces A no puede ser cierta, por tanto la negación de A es cierta. El lenguaje popular usa a menudo este esquema. Si mi suegra quiere negarme cualidades dirá: “Si mi yerno es inteligente entonces yo soy la reina de España”. Como ella no es la reina de España (oh! absurdo) entonces queda probada la negación de “mi yerno es inteligente”.

La esencia de una prueba por el absurdo yace en la noción de que si uno supone cierto algo que no puede serlo, y usa la hipótesis y las leyes de la lógica correctamente, eventualmente caerá en contradicción, es decir algo que es cierto y falso al mismo tiempo. Entonces lo que suponemos cierto no puede serlo.

El esquema lógico de la contraposición se apoya en la equivalencia

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

La reducción al absurdo se basa en

$$((p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad (*)$$

Entiéndase que si \mathbf{p} y la negación de \mathbf{q} nos llevan a una contradicción \mathbf{r} y $\sim \mathbf{r}$, entonces \mathbf{p} implica \mathbf{q} .

Usando tablas de verdad de lógica el autor puede verificar que la implicación (*) es una *tautología*, es decir que para cualquiera de las ocho posibles combinaciones de valores (V ó F) de las variables \mathbf{p} , \mathbf{q} , y \mathbf{r} , la implicación es siempre cierta.

Un esquema más sencillo aún puede ser el siguiente

$$[\sim q \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \Rightarrow q$$

$\mathbf{r} \wedge \sim \mathbf{r}$ es siempre falso, es la esencia de la contradicción. Una proposición y su negación no pueden vivir simultáneamente. Entonces el esquema dice que si la negación de \mathbf{q} implica una falsedad, \mathbf{q} debe ser cierta.

El siguiente ejemplo es la prueba clásica de que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional, es decir no es fracción o cociente de dos enteros.

Ejemplo. Probar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Comentario. No se extrañe el lector que en este problema no aparezca una hipótesis. En verdad la hipótesis es todo lo que se necesita saber eventualmente sobre los números enteros y racionales, como que se puede hacer con ellos las operaciones elementales, que se puede simplificar fracciones. Dentro del contexto de un curso en el que el conocimiento es acumulativo, se llega al punto en que esto debe probarse antes de probar hechos más profundos. Observemos que ésta no es una prueba por contraposición. Suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional, se llegará a una contradicción intrínseca.

Prueba. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. En ese caso $\sqrt{2}$ puede ser escrito como cociente de dos enteros a y b con $b \neq 0$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Es más, podemos suponer que esta fracción está correctamente simplificada, es decir a y b no tienen factores comunes. Esta es una verdad. Ahora manipulamos la ecuación. Cuadramos y suprimimos el denominador y obtenemos

$$2b^2 = a^2$$

lo cual nos dice que a^2 es número par. Por el primer ejemplo de esta sección sabemos que a también es par. Entonces a tiene la forma $a = 2x$ y por ello $a^2 = 4x^2$ que sustituimos en la ecuación anterior y nos da

$$2b^2 = 4x^2$$

donde cancelamos el 2 y obtenemos $b^2 = 2x^2$ mostrando que b^2 es par. Por tanto b también es par.

Hemos obtenido que a y b , ambos son números pares lo cual contradice el hecho que la fracción $\frac{a}{b}$ estaba simplificada. Esta contradicción obliga concluir que $\sqrt{2}$ no es racional. ■

Dicho de otro modo, existe N tal que $n > N \Rightarrow |(-1)^n - L| < 0.5$ o equivalentemente $|L - (-1)^n| < 0.5$ pues $|x| = |-x|$. Entonces tomamos dos valores n y $n + 1 > N$ con n par y, por lo que acabamos de establecer, tenemos las siguientes dos desigualdades.

$$\begin{aligned} -0.5 < (-1)^n - L < 0.5 \quad \text{y} \\ -0.5 < L - (-1)^{n+1} < 0.5 \end{aligned}$$

que al sumarlas verticalmente se cancelan las L y obtenemos

$$-1 < (-1)^n - (-1)^{n+1} < 1$$

es decir, (ver §5 problema 5.3.)

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| < 1$$

Pero al calcular lo que está entre barras, como n es par y por tanto $n + 1$ impar, obtenemos

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |1 - (-1)| = |2| = 2$$

que no puede ser < 1 . Esta es una contradicción y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ no existe. ■