§8. INDUCCION MATEMATICA

La inducción es la conquista del infinito. Sólo en matemáticas podemos decir que una afirmación es cierta para un número infinito de valores. Si hay una escalera infinita y 1) puedo colocarme al comienzo de la escalera y 2) si estando en un peldaño cualquiera tengo un método para ascender al siguiente peldaño, entonces puedo llegar a cualquier peldaño, uno a uno, pero puedo. Es decir, potencialmente puedo recorrer toda la escalera. Esta es la esencia de la inducción.

Como verá el lector, esta infinitud corresponde al conjunto de los números naturales que es un conjunto discreto. En él puedo aislar cada elemento, como los peldaños de la escalera. Por ello la inducción es un método para establecer hechos en conjuntos infinitos discretos, que se pueden numerar, de preferencia con los números naturales.

La inducción es un axioma o un postulado, se le llama "principio". No se le demuestra. Si lo aceptamos como cierto entonces es un método para establecer verdades.

Principio de inducción: Si una aserción $P = P(n)$ relativa a los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$ cumple las condiciones.

1) $P(1)$ es cierta (es decir P es cierto para $n = 1$ o puedo pisar el primer peldaño)
2) Si al suponer cierto $P(h)$ (*la hipótesis de inducción* se puede establecer que tambien es cierto $P(h + 1)$ (es decir estando en un peldaño cualquiera, puedo llegar al siguiente)

entonces $P(n)$ es cierto para cualquier número natural n.

Los libros en general son más austeros y expresan la inducción como

"Si una aserción $P(n)$ cumple
1) $P(1)$ es cierto
2) $P(h) \Rightarrow P(h+1)$
entonces $P(n)$ es cierto para todo n"

Ejemplo 1. *Sea* $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ *la suma de los* n *primeros números naturales. Probar que* $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$

> *Comentario:* Hay una prueba clásica muy simple e ingeniosa atribuída al niño Gauss, pero aquí usaremos inducción. Designamos con $P(n)$ la aserción $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Queremos probar que $P(n)$ es cierta, para todo entero positivo $n \geq 1$, es decir, la fórmula es correcta.

Prueba: 1)Probaremos que $P(1)$ es cierto. $P(1)$ dice que la suma de los 1 primeros números $S(1) = \frac{1}{2}1(1+1)$, lo cual es indiscutiblemente cierto.
2)Supongamos ahora que $P(h)$ es cierto (hipótesis de inducción), es decir,

$$S(h) = \frac{1}{2}h(h+1).$$

Probaremos que $P(h+1)$ es cierto. Entonces tratemos de probar que $S(h+1) = \frac{1}{2}(h+1)[(h+1)+1]$. En efecto

$$\begin{aligned}
S(h+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + h + (h+1) \\
&= S(h) + (h+1) \\
&= \frac{1}{2}h(h+1) + (h+1) && (*P(h) \text{ es cierto}*) \\
&= \frac{1}{2}(h+1)[h+2] && (*\text{Si se factoriza por } (h+1)*) \\
&= \frac{1}{2}(h+1)[(h+1)+1] && \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Probar que* $2^n > n^2$ *para* $n \geq 5$.

> *Comentario:* $2^n > n^2$ es falso para $n = 2, 3$ y 4. Por ello la probaremos para $n \geq 5$, significando que el primer peldaño es 5. $P(5)$ dice que $2^5 > 5^2$ lo cual es en efecto cierto. Entonces la segunda parte de la inducción debe probarse para $n \geq 5$.

Prueba. 1) Como $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, $P(5)$ es cierto.

2) Suponemos cierto $P(h)$, para $h \geq 5$, es decir $2^h > h^2$. Probaremos que $P(h+1)$ es cierto. En efecto,

$$\begin{aligned}
2^{h+1} &= 2 \cdot 2^h \\
&> 2 \cdot h^2 && (*\text{pues } 2^h > h^2 \text{por la hip. de inducción}*) \\
&= h^2 + h^2 \\
&= h^2 + hh \\
&\geq h^2 + 5h && (*\text{pues } h > 5*) \\
&= h^2 + 2h + 3h && (*\text{pues } h > 1*) \\
&> h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2
\end{aligned}$$

Al comparar los extremos de esta cadena podemos afirmar que

$$2^{h+1} > (h+1)^2 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 3. *Probar que si un conjunto S tiene n elementos entonces S tiene 2^n subconjuntos.*

> *Comentario.* Para convencernos vemos si $n = 2$. Un conjunto de 2 elementos puede ser $\{a, b\}$ sus subconjuntos, incluyendo los triviales son
>
> $$\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$
>
> que son 4, es decir 2^2.

Prueba. 1) Si $n = 1$ entonces el conjunto tiene la forma $\{a\}$ y solo tiene $2^1 = 2$ subconjuntos, a saber: $\Phi, \{a\}$.

2) Supongamos ahora que todo conjunto de h elementos tiene 2^h subconjuntos. Probaremos entonces que un conjunto de $(h+1)$ elementos tiene 2^{h+1} subconjuntos.

Sea entonces C un conjunto con $h+1$ elementos y sea a un elemento cualquiera, pero fijo, de C. El conjunto $C - \{a\}$, C

sin el elemento a, tiene h elementos y por la hipótesis inductiva tiene 2^k subconjuntos, todos ellos sin el elemento a. Si a cada uno de esos 2^h subconjuntos le agregamos el elemento a obtenemos 2^h nuevos subconjuntos, todos ellos diferentes de los anteriores y con el elemento a. Tenemos entonces $2^h + 2^h = 2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$ subconjuntos.

Sólo falta probar que esos son todos los subconjuntoc de C. Para ello tomemos un subconjunto $S \subseteq C$. Si $a \notin S$ entonces $S \subseteq C - \{a\}$ y fue tomando en cuenta en la hipótesis inductiva. Si $a \in S$ entonces S es obtenido de un subconjunto de $C - \{a\}$ al que se le agrega a; y ese está en la segunda cuenta. Por tanto en C hay 2^{h+1} subconjuntos. ∎

Problema. *8.1. Probar por inducción que la suma de los primeros n números impares es un cuadrado perfecto.*

Problema. *8.2. Probar por inducción que para $3^n > n^3$ para $n \geq 4$.*

Problema. *8.3. Probar por inducción que*

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$$

.

Problema. *8.4. Probar por inducción que todo grafo completo de n vertices tiene $\frac{1}{2}n(n-1)$ arcos.*

Probelam. *8.5. Probar por inducción que todo poligono convexo de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.*

Problema. *8.6. Un palíndromo puede definirse como una cadena de caracteres que se puede leer igual de izquierda a derecha o viceversa. "ROTOR" es un palíndromo. También puede definirse palíndromo por consideración de casos, de la siguiente manera:*

i) La cadena vacía es un palíndromo.
ii) La cadena de un solo símbolo es un palíndromo

iii) Si a es un carácter y X un palíndromo la cadena aXa también es un palíndromo

iv) Ninguna otra cosa es un palíndromo.

Como estamos frente a dos definiciones del mismo concepto, pruebe que son equivalentes.

> *Comentario:* Probar que estas dos definiciones son equivalentes significa que si un objeto es palíndromo según la primera definición también lo es según la segunda definición y reciprocamente.